VIEPEM
ENCUENTRO PROVINCIAL DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

VI Encuentro Provincial de Educación Matemática.
27 al 29 de setiembre, 2017. Puntarenas, Costa Rica.

Ejercicios de la Olimpiada Costarricense de Matemática como herramienta para abordar la resolución de problemas en secundaria.

Leonel Chaves-Salas
leonel.chaves.salas@una.cr
Universidad Nacional
Costa Rica

Alexander Hernández-Quirós
alexander.hernandez.quiros@una.cr
Universidad Nacional
Costa Rica

Federico Mora-Mora
federico.mora.mora@una.cr
Universidad Nacional
Costa Rica

Resumen

Esta comunicación expone la utilidad de los ejercicios de la Olimpiada Costarricense de Matemática en secundaria (OLCOMA), como un recurso para que los docentes puedan tomar ejemplos para abordar la resolución de problemas en secundaria. En dicha olimpiada se proponen ejercicios no rutinarios que abarcan varios de los contenidos de currículum de secundaria, muchos de los cuales concuerdan con la definición de problemas matemáticos dada en los nuevos Programas de Estudio de Matemáticas de secundaria.

Palabras clave: *Educación Matemática; Olimpiadas de Matemática; Resolución de problemas.*

Ponencia

Chaves-Salas, L.; Hernández-Quirós, A. y Mora-Mora, F. (2017). Ejercicios de la Olimpiada Costarricense de Matemática como herramienta para abordar la resolución de problemas en secundaria. En Y. Morales-López, M. Picado, R. Gamboa, C. Martínez, M. Castillo y R. Hidalgo (Eds.), *Memorias del VI Encuentro Provincial de Educación Matemática, Costa Rica, 2017* (pp. 86-95). Heredia: Universidad Nacional. ISBN: 978-9968-9661-5-3. DOI: http://dx.doi.org/10.15359/epem.6.19

Introducción

El desarrollo científico y tecnológico de un país está íntimamente relacionado con la formación matemática de sus habitantes. Por tanto, la formación matemática no solo es importante en el quehacer matemático, sino que es básico en la formación intelectual que necesita la población para fortalecer las ciencias, las tecnologías y en general, las habilidades de razonamiento lógico que se requiere para enfrentarse a gran variedad de problemas (Ruiz, 2000).

Ante esta necesidad, la formación matemática no puede centrarse únicamente en la repetición mecánica de algoritmos, y por el contrario, debe dar mayor importancia al razonamiento y a la resolución de problemas. Es importante dejar claro que, cuando se menciona problemas matemáticos, se debe entender por aquellos que no son ejercicios rutinarios, donde el estudiante simplemente repite lo que ha hecho el profesor con otros valores, sino situaciones que obligan al estudiante a razonar, buscar y probar diferentes estrategias para resolverlo, y sobre todo invertir tiempo y esfuerzo.

Uno de los principales autores que se pueden mencionar en cuanto a la resolución de problemas es el matemático húngaro George Pólya (1887-1985), considerado el pionero en este tema. Las aportaciones de Pólya incluyen más de 250 documentos matemáticos y tres libros que promueven un acercamiento al conocimiento y desarrollo de estrategias en la solución de problemas. Su principal obra es el libro Cómo Plantear y Resolver Problemas que se ha traducido a más de 15 idiomas. En este plantea lo que denomina el método de los cuatro pasos; afirma que para resolver cualquier problema se debe:

- comprender el problema
- concebir un plan
- ejecutar el plan y
- examinar la solución.

Además, en cada una de estas etapas recomienda hacerse una serie de preguntas guías. En la I Etapa el estudiante puede preguntarse ¿cuál es la incógnita? ó ¿qué es lo que debo hallar?, ¿cuáles son los datos?, ¿qué otras condiciones o restricciones se plantean? En la etapa de concebir un plan se puede cuestionar ¿este problema es similar a alguno que ya haya resuelto en otra ocasión?, ¿conozco algún teorema que pueda aplicarse?, ¿puede plantearse de otra forma? Cuando se está ejecutando el plan recomienda revisar si puede ver claramente si cada paso es correcto. Finalmente, al examinar la solución se puede preguntar ¿se puede verificar el resultado?, ¿se puede emplear el resultado o el método en otro problema? (Alfaro, 2006)

No puede dejar de mencionarse también al matemático estadounidense Allan Schoenfeld, quien sobresale, principalmente, por poner en práctica las ideas de Pólya en investigaciones con estudiantes y docentes de matemáticas, ya que Pólya nunca realizó investigaciones sobre sus propias ideas. Schoenfeld publicó su libro Mathematical Problem Solving en 1985, basado en sus investigaciones realizadas en la década de 1980. En ellas llegó a la conclusión de que, cuando se tiene o se quiere trabajar con resolución de problemas como una estrategia didáctica, hay que tener en cuenta situaciones más allá de las puras heurísticas. Por lo tanto, ofrece recomendaciones a los docentes que deseen aplicar dicha estrategia didáctica (Barrantes, 2006).

Es importante resaltar que la resolución de problemas es un asunto presente en la educación matemática desde hace varias décadas; sin embargo, no se ha introducido en los currículos de los países de la misma manera. En el año de 1980 la cuarta reunión internacional del Committee of Mathematical Instruction (ICMI) tuvo un grupo de trabajo sobre resolución de problemas y de ese momento en adelante ha sido un tema central en la Educación Matemática internacional. El Concejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos (NCTM por sus siglas en inglés) colocaba la resolución de problemas como el foco de la Educación Matemática en la década de los 80 para ese país. En el año 1989 y, luego, en el 2000, esta organización ha propuesto el tema con igual intensidad. (Ruiz, A., et al, 2006)

La resolución de problemas en los nuevos Programas de Estudio de Matemáticas de secundaria.

Desde mayo del 2012 el Ministerio de Educación Pública (MEP) aprobó nuevos programas en Matemática, donde se propone un cambio de visión para romper con el mito de que las matemáticas son difíciles y lograr superar los prejuicios que se tienen en la sociedad. La estrategia consiste en la participación activa de los estudiantes en la resolución de problemas asociados a su entorno físico, social o cultural, para la manipulación de objetos matemáticos y lograr la construcción de aprendizajes al pasar desde lo concreto hacia lo abstracto. De esta manera, se puede lograr que los estudiantes realicen procesos matemáticos de mayor complejidad y evitar el uso de operaciones mecánicas.

Para lograr esto, los programas plantean el uso de varias estrategias, las cuales incluyen cinco procesos básicos:

- razonar y argumentar
- plantear y resolver problemas
- conectar, establecer relaciones
- representar de diversas formas (gráficas, numéricas, simbólicas, tabulares, etc.)
- comunicar, expresar ideas matemáticas formal y verbalmente.

Por medio de esto, se pretende desarrollar la capacidad matemática para la resolución de problemas, para la aplicación o modelización de diversas situaciones y lograr mayores niveles analíticos en la justificación y argumentación matemática. La idea es no saturar los programas de contenidos, sino seleccionar bien los contenidos necesarios para lograr "rigor y profundidad" en el manejo de los procesos y el lenguaje matemático.

Los nuevos programas utilizan cinco ejes, uno de los cuales es precisamente la resolución de problemas como estrategia metodológica principal, que encuentra un sentido esencial para la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas debido a que "es instrumento poderoso para lograr el dominio de habilidades, la realización de procesos así como el progreso de la competencia matemática" (Programas MEP, 2012, p. 28).

Se enfatiza que la resolución de problemas está asociada a la naturaleza de las Matemáticas y que debe existir una relación entre esta naturaleza y las acciones de enseñanza y aprendizaje, pues su ausencia significaría la incomprensión de un sentido central de las Matemáticas. Para ello, debe haber adaptación al entorno escolar, por lo que en la resolución de problemas se integran dos propósitos: aprendizaje de los métodos o estrategias para plantear y resolver problemas, y el aprendizaje de los conceptos y procedimientos matemáticos a través de la resolución de problemas. En el primer propósito se enfatizan las estrategias, heurísticas o métodos que requiere un problema, lo cual no garantiza que una persona pueda resolver problemas nuevos y distintos, pero favorece el desarrollo de esa capacidad. En el segundo propósito plantea una acción de aula que permita generar aprendizajes matemáticos en un contexto específico promoviendo la realización de los procesos matemáticos.

La resolución de problemas es el enfoque principal del currículo de los nuevos programas, el cual asume como objetivo principal "la búsqueda del fortalecimiento de mayores capacidades cognoscitivas para abordar los retos de una sociedad moderna" (Programas MEP 2012, p. 13). Se enfatiza el trabajo con problemas asociados a los entornos reales, físicos, sociales y culturales. Usar problemas extraídos de la realidad o que se puedan imaginar como reales, promueve acciones cognitivas requeridas para el aprendizaje de las Matemáticas; por un lado, porque es posible despertar un mayor interés y motivación en la construcción de sus aprendizajes; y por otro, usar o aplicar las Matemáticas dentro de contextos reales que promueven el contacto con los objetos matemáticos en la realidad de donde provienen. Trabajar en estos diversos contextos ayuda a utilizar las matemáticas para representar o modelar situaciones del entorno las cuales, al ser adaptadas al medio escolar, corresponden a aquellas actividades realizadas en los procesos matemáticos tradicionales.

Es importante aclarar que, aunque en los programas se hace énfasis en la utilización de contextos reales para el planteamiento de problemas, también se menciona que "un problema puede diseñarse a partir de pasajes de la historia de las Matemáticas, de una representación artística donde es posible encontrar matemáticas, incluso un juego, un rompecabezas, un video". (Programas MEP, 2012, p. 29). Además, "favorecer problemas en contextos reales no implica dejar de lado problemas abstractos" (Programas MEP, 2012, p. 30), pues estos problemas abstractos son necesarios para poner en juego distintas habilidades y procesos (la justificación y demostración, el uso de lenguaje matemático y el razonamiento riguroso abstracto).

La Olimpiada Costarricense de Matemática

La Olimpiada Costarricense de Matemática (OLCOMA) es una iniciativa inter-universitaria puesta en marcha desde 1988, la cual responde a un movimiento mundial que busca el desarrollo del talento matemático mediante justas académicas de alto nivel.

OLCOMA ha crecido con el apoyo de los Ministerios de Educación y Ciencia y Tecnología, y en la actualidad la competencia nacional reúne a 2600 estudiantes de más de 300 instituciones de educación secundaria a lo largo y ancho de nuestro país.

La competencia consta de tres etapas, dos eliminatoria y la final nacional, la primera eliminatoria es una prueba que consta de 25 ítems de selección única la cual se aplica el primer viernes de junio, la segunda eliminatoria se aplica el primer viernes de setiembre y la prueba consta de 12 ítems de selección y tres de desarrollo, la final nacional es un evento en el cual se concentran alrededor de 125 estudiantes para efectuar dos pruebas de desarrollo (cada uno de tres preguntas de desarrollo, este es el formato clásico de las olimpiadas internacionales).

Para fomentar la equidad y competitividad, los estudiantes son separados en tres niveles. El nivel I reúne a los estudiantes de sétimo año, el nivel II está formado por los estudiantes de octavo y noveno año, y el nivel III está conformado por los estudiantes del ciclo diversificado.

Con los estudiantes finalistas se desarrolla el proceso de selección de los estudiantes que representarán al país en justas internacionales, en las cuales se participa de manera presencial.

OLCOMA también organiza la aplicación de pruebas internacionales por correspondencia las cuales son abiertas a todos los estudiantes del país, de estas la más accesible para la población de estudiantes de Costa Rica es la Olimpiada de Mayo.

Junto a la organización y aplicación de las pruebas de los diferentes eventos, OLCOMA también desarrolla talleres de preparación para los estudiantes participantes y en conjunto con las direcciones regionales se desarrollan programas de actualización para profesores.

Cada año la olimpiada genera más de 100 problemas de selección única y alrededor de 60 problemas de desarrollo segmentados en cuatro áreas: razonamiento lógico, teoría de números, álgebra y geometría. Estos problemas representan una excelente fuente de insumos para la preparación de las lecciones de matemática, dado que responden a la visión implementada en los nuevos programas de estudio.

Dichos problemas pueden ser utilizados como introducción o evaluación de muy diversos temas desarrollados en todos los niveles de la educación secundaria.

Ejemplos de ejercicios olímpicos

En este apartado se presentan algunos problemas utilizados en distintas eliminatorias de la Olimpiada Costarricense de Matemática, los cuales se pueden utilizar para abordar la resolución de problemas en distintas temáticas y niveles de la educación secundaria.

Los primeros tres ejemplos buscan, principalmente, potenciar las heurísticas en la resolución de problemas, potenciar las habilidades de razonamiento, argumentación al tener que explicar la posible solución, pero también se muestra como se podrían utilizar para abordar conceptos matemáticos formales. En los ejemplos 4 y 5 se muestran problemas específicos sobre teoría de números, mientras que los dos últimos muestran ejemplos en geometría.

Ejemplo 1. (Pregunta 5, I Nivel, II Eliminatoria 2016)

Un juego consiste de una cuadrícula de 4x4 y fichas de dos formas (triángulos y cuadrados). Un jugador escoge un tipo de ficha y se la da al segundo jugador quien la coloca en cualquiera de las 16 casillas disponibles, luego el segundo jugador escoge un tipo de ficha y se la da al primero quien la coloca donde quiera (de los cuadros que están libres), continúan de este modo y gana el que logre formar una línea con tres fichas de la misma forma (horizontal, vertical o diagonal).

Antonio y Berta juegan una partida. Primero Antonio toma un cuadrado y se lo da a Berta, quien lo coloca en la casilla 6 (considere la imagen adjunta). Berta le da un triángulo a Antonio y este lo coloca en la casilla 7. Antonio le da otro cuadrado a Berta y ella lo coloca en la casilla 10. Ella le da un triángulo a Antonio y él lo coloca en la casilla 14. Ahora Antonio le da un triángulo a Berta. La cantidad de casillas donde Berta puede colocar ese triángulo de modo que no pierda en la siguiente jugada es

a) *4*
b) *5*
c) *6*
d) *7*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Solución:

Si coloca el triángulo en cualquiera de las casillas 3, 8, 11, 12, 13, 15, 16, en la siguiente jugada Antonio ganará, sin importar el tipo de ficha que ella le dé. Por ejemplo, si coloca el triángulo en la casilla 11 y le da a Antonio un cuadrado, este ganará colocándolo en la casilla 2, si le da un triángulo, este ganará colocándolo en la casilla 3 o 15. Si lo coloca en la 8 y le da un triángulo, Antonio ganará colocándolo en la casilla 11 y si le da un cuadrado gana colocándolo en la 2.

Si lo coloca en cualquiera de las restantes 5 casillas puede evitar perder en la siguiente jugada. Si lo coloca en las casillas 1, 4, 5, 9 y le da a Antonio un triángulo, entonces este no puede ganar. Si lo coloca en la casilla 2, puede evitar perder dándole a Antonio un cuadrado. Entonces, hay 5 casillas en las que puede Berta puede colocar el triángulo.

Esta es una pregunta en la que se busca principalmente fomentar la habilidad de *Razonar y argumentar*, pues debe entender y analizar la situación planteada, observando todos los posibles casos, y además explicar su respuesta. El problema se basa en una situación concreta de una partida de un determinado juego, el cual es una versión modificada del "gato", solo que en lugar de que cada persona juegue con "equis" o "círculos" fijos, cada jugador decide la ficha que colocará su contrincante en cada movimiento. Esto hace que incluso primero se puede poner a jugar a los alumnos y luego analizar la situación concreta. Esto responde a lo indicado en el Programa del MEP, "los problemas pueden estar basados incluso en juegos" (Programas MEP, 2012, p. 29), y además busca generar una actitud positiva de los estudiantes hacia la matemática.

Ejemplo 2. (Pregunta 2, II Nivel, II Eliminatoria 2015)

Rolando dibuja una serie de figuras:

Si continúa de la misma forma, la figura que estará en la posición 2015 será

(a) 

(b) 

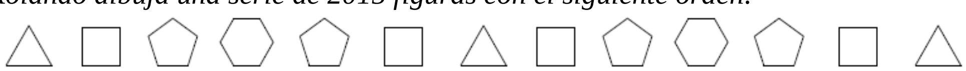
(c) 

(d) 

Solución:
Observe que hay un:
Triángulo en las posiciones 1; 7; 13;…; 6k+1
Cuadrado en las posiciones 2; 8; 14;…; 6k+2 y 6; 12; 18;…; 6k
Pentágono en las posiciones 3; 9; 15;…; 6k+3 y 5; 11; 17;…; 6k+5
Hexágono en las posiciones 4; 10; 16;…; 6k+4
Como 2015 = 5 + 335 x 6, entonces en la posición 2015 habrá un pentágono.

Con este problema se busca desarrollar la habilidad de observación de patrones en una sucesión. Tal como se menciona en los nuevos programas, esta es una habilidad que se busca desarrollar desde 4° año de primaria “Analizar patrones en sucesiones con figuras, representaciones geométricas” (Programas MEP, 2012, p. 232). Pero además se puede aprovechar para desarrollar el tema de algoritmo de la división, pues se observa que la figura que está en cada posición depende del residuo de la división por 6. Lo interesante de este problema en particular se pueden buscar generalizaciones o incluso generar problemas más complicados. En este caso, en la misma II Eliminatoria del 2015, pero en el III Nivel, se plantea la siguiente pregunta de desarrollo:

Ejemplo 3. (Desarrollo, III Nivel, II Eliminatoria 2015)
Rolando dibuja una serie de 2015 figuras con el siguiente orden:



Si selecciona al azar una figura que esté en una posición múltiplo de 5, determine la probabilidad de que esta figura sea un pentágono.

Solución:
Observe que hay un:
Triángulo en las posiciones 1; 7; 13;…; 6k+1
Cuadrado en las posiciones 2; 8; 14;…; 6k+2 y 6; 12; 18;…; 6k
Pentágono en las posiciones 3; 9; 15;…; 6k+3 y 5; 11; 17;…; 6k+5
Hexágono en las posiciones 4; 10; 16;…; 6k+4

De esto se puede deducir también que, si se toma un número de la secuencia y se divide por 6, la figura que esté en esa posición quedará determinada por el residuo de esta división de la siguiente manera:

Residuo	*Figura*
0	*Cuadrado*
1	*Triangulo*
2	*Cuadrado*
3	*Pentagono*
4	*Hexagono*
5	*Pentagono*

Tomando esto en cuenta se puede observar un periodo de las figuras obtenidas, debido al periodo de los residuos:

Numero :	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Residuo :	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0
Figura :	*P*	*H*	*P*	*C*	*T*	*C*	*P*	*H*	*P*	*C*	*T*	*C*

Se observa que por cada grupo de 6 múltiplos consecutivos de 5 hay 2 pentágonos. Finalmente, en 2015 números hay 403 múltiplos 5, que es la cantidad total de casos; para saber la cantidad de pentágonos que hay en esos 403 múltiplos se tiene $403 = 67 \cdot 6 + 1$, *por lo que se tienen en total* $67 \cdot 2 + 1 = 135$ *pentágonos. Por lo tanto la probabilidad buscada es* $\frac{135}{403}$

Con esta pregunta, además de la observación de patrones en una sucesión, se pueden desarrollar temas como algoritmo de la división, ordenamiento de datos, técnicas de conteo y concepto de probabilidad.

Ejemplo 4. (Pregunta 18, I Nivel, I Eliminatoria 2014)

Por un error en la fotocopiadora, en un libro de 400 páginas se dejaron en blanco todas las páginas cuyos números de página eran múltiplos de 3 o de 4, determine cuántas páginas se fotocopiaron correctamente.

(a) 150
(b) 200
(c) 220
(d) 250

Solución

Para resolver el problema se debe determinar la cantidad de múltiplos de 3 y 4 menores que 400. De acuerdo con lo expuesto anteriormente, la cantidad de múltiplos de 3 menores que 400 es 133. Esto porque el cociente de la división de 400 por 3 es 133. De forma análoga, hay 100 múltiplos de 4 menores que 400.

Ahora se deben restar todos los números que son múltiplos de ambos, es decir los múltiplos de 12 (pues se consideraron dos veces) que en total son 33 pues el cociente entre 400 y 12 es 33. Por lo tanto, se dejaron en blanco 133 + 100 − 33 = 200 páginas y se fotocopiaron correctamente 200 páginas. La opción correcta es la b.

El ejercicio anterior es un ejemplo del tipo de problemas donde los estudiantes pueden utilizar sus habilidades adquiridas de los conceptos de divisibilidad con respecto a múltiplos y divisores para resolverlo, lo cual se busca en los nuevos programas según se indica en la página 275 “Utilizar conocimientos de teoría de números en la resolución de problemas contextualizados o propios de esta rama”.

Para la resolución del siguiente problema, es necesario aplicar el tema de factorización prima.

Ejemplo 5. (Pregunta 11, I Nivel, I Eliminatoria 2013)
El triple del producto de las edades de un padre y su hijo es 2013. Si ambos cumplen años el mismo día, entonces cuando nació el hijo, la edad del padre era
A) 48
B) 49
C) 50
D) 51

Solución
Por el teorema fundamental de la aritmética, 2013 puede descomponerse como el producto de números primos. Al descomponer 2013 en factores primos se obtiene 2013 = 3 · 11 · 61. Esto quiere decir que 2013 se expresa de forma única como el triple producto de 11 y 13. Dado que el triple producto de las edades del padre y el hijo es 2013 se tiene que la edad del padre es 61 y la del hijo 11. Por lo tanto, la edad del padre era 50 cuando el hijo nació. La respuesta correcta es la opción c.

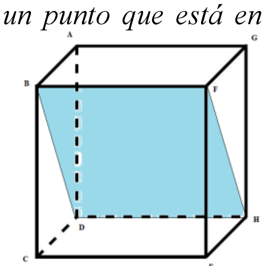
Ejemplo 6. (Pregunta 10, I Nivel, I Eliminatoria 2013)
En un triángulo un ángulo interno mide 30º. Si para los otros dos ángulos se sabe que uno mide el doble del otro, entonces se puede afirmar que dicho triángulo es
A) equiángulo
B) obtusángulo
C) acutángulo
D) rectángulo

Solución
Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180 º y sabemos que uno de sus ángulos es 50 º, entonces la suma de los otros dos ángulos internos debe ser 150 º y como uno de ellos mide el doble que el otro, entonces uno mide 100 º y el otro 50 º. Al tener un ángulo interno obtuso entonces el triángulo se clasifica como obtusángulo.

Esta pregunta se puede utilizar para evaluar el conocimiento de ángulos internos de un triángulo que se analiza en sétimo año, y relacionarlo con la clasificación de triángulo que se estudia en primaria, y no requiere de ningún trabajo algebraico para obtener las medidas de los ángulos, además de la parte meramente de cálculo existe una segunda parte de reflexión en donde el estudiante de concluir que tipo de triángulo es de acuerdo con los valores obtenidos.

Ejemplo 7. (Pregunta 21, I Nivel, I Eliminatoria 2013)
Si □ABCD, □ABFG y □GFEH son caras de un cubo, entonces un punto que está en el mismo plano que B, F y D corresponde a
A) C
B) E
C) G
D) H

Solución:
Según los datos, se construye una figura como la siguiente, donde H es coplanar a B, F y D.



Puede observarse que en este ejercicio el estudiante requiere de la correcta comprensión de los conocimientos para poder construir la figura y la ubicación de los puntos coplanarios, lo que le permite deducir la respuesta. Se sugiere este ítem para la evaluación del habilidades tales como establecer relaciones entre los diversos elementos de figuras tridimensionales.

Referencias

Alfaro, C. & Barrantes, H. (2008). ¿Qué es un problema matemático? Percepciones en la enseñanza media costarricense. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 4, 83-98.

Chaves, L., Hernández, A. y Mora, F. (2012). Formulación del plan quinquenal. OLCOMA 2013-2017. Manuscrito inédito. Escuela de Matemática. Universidad Nacional. Heredia, Costa Rica.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). Programas de estudio Matemáticas. I, II y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado. Costa Rica: autor.

Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas (2013-2016). Exámenes Olimpiada Nacional: I y II Eliminatoria. San José, Costa Rica: autor.

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Ruiz, A. (2000). *El desafío de las Matemáticas*. Heredia, Costa Rica: EUNA.

Ruiz, A. (2006). *Universalización de la educación secundaria y reforma educativa*. San José, Costa Rica: EUCRCONARE.