

UNIVERSIDAD NACIONAL  
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
ESCUELA DE CIENCIAS GEOGRÁFICAS

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA  
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
POSGRADO EN GEOGRAFÍA

PROGRAMA MAESTRÍA PROFESIONAL EN SISTEMAS DE  
INFORMACIÓN GEOGRÁFICAS Y TELEDETECCIÓN

**APLICACIÓN DE MODELOS DE INTERPOLACIÓN DENTRO DE UN  
SISTEMAS DE INFORMACIÓN GEOGRÁFICA PARA LA  
ESTIMACIÓN DE ALTURAS NIVELADAS EN COSTA RICA**

**Trabajo final de investigación aplicada sometido a la consideración de la Comisión del  
Programa de Estudios de Posgrado en Geografía para optar por el grado y título de  
Maestría Profesional en Sistemas de Información Geográfica y Teledetección**

Sara Bastos Gutiérrez

Campus Omar Dengo, Heredia  
Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, Montes de Oca  
Costa Rica, año 2018

## DEDICATORIA

Para mis amores, familia y amigos...

## **AGRADECIMIENTOS**

Dios que siempre está conmigo y me hace creer que lo imposible siempre es posible a pesar de cualquier cosa.

Un especial agradecimiento para mis chicas que me han apoyado y a mi amor porque nunca deja de creer en mí.

A mi familia porque ellos me hacen crecer y siempre están ahí, a doña Seidy por apoyarme.

A mis grandes amigos y compañeros de Maestría, en especial al grupo Maldad...

Y por último a Dr.Ing. Jorge Moya, gran amigo y compañero y al Msc. Christian Nuñez por su paciencia y apoyo en el proceso.

“Este Trabajo Final de Graduación fue aceptado por la Comité de Gestión Interinstitucional del Programa (CI) de Maestría en Sistemas de Información Geográfica y Teledetección UNA-UCR en Sistemas de Información Geográfica y Teledetección, de la Universidad de Costa Rica (UCR) y la Universidad Nacional (UNA) como requisito para optar por el grado de Magíster en Sistemas de Información Geográfica y Teledetección.”

---

M.Sc. Luis Francisco Rodríguez Soto

Programa de Maestría en Sistemas de Información Geográfica y Teledetección  
Universidad Nacional

---

Dr. Rafael Arce

Programa de Maestría en Sistemas de Información Geográfica y Teledetección  
Universidad de Costa Rica

---

Msc. Marvin Alfaro Sánchez

Profesor responsable

---

Msc. Christian Nuñez Solís

Tutor

---

Dr. Jorge Moya Zamora

Lector

---

Sara Bastos Gutiérrez

Sustentante

## Tabla de contenido

Lista de tablas .....	ix
Lista de gráficos.....	x
Lista de figuras.....	xi
Lista de mapas .....	xiii
<b><i>CAPÍTULO I</i></b> .....	<b>1</b>
<b>1.1. Planteamiento del problema</b> .....	<b>2</b>
<b>1.2. Objetivos</b> .....	<b>4</b>
1.2.1 Objetivo general: .....	4
1.2.2 Objetivos específicos: .....	4
<b>1.3. Justificación del problema</b> .....	<b>5</b>
<b><i>CAPITULO II</i></b> .....	<b>7</b>
<b>2.1. Conceptos fundamentales</b> .....	<b>7</b>
<b>2.2. Tipos de alturas</b> .....	<b>8</b>
2.2.1 Altura Elipsoidal (h) .....	9
2.2.2 Altura Ortométrica (H) .....	10
2.2.3 Relación entre alturas .....	13
<b>2.3. Modelo EIGEN-6C4</b> .....	<b>14</b>
<b>2.4. Geoestadística</b> .....	<b>16</b>
2.4.1 Modelos de interpolación geoestadísticos .....	17

2.4.2. Inverse Distance Weighting (IDW) .....	18
2.4.2. Spline .....	19
2.4.3 Topo to Raster .....	20
<b><i>CAPÍTULO III</i></b> .....	<b>21</b>
<b>3.1. Recopilación y estandarización de información.</b> .....	<b>21</b>
3.1.1 Fuente de información de las Alturas elipsoídicas. ....	21
3.1.2 Ondulaciones del geoides provenientes del modelo EIGEN-6C4 .....	31
3.1.3 Red de bancos de nivel del IGN de Costa Rica. ....	35
<b>3.2. Análisis exploratorio de los datos</b> .....	<b>36</b>
<b>3.3. Análisis estructural de los datos.</b> .....	<b>37</b>
<b>3.4. Modelamiento de las superficies de predicción.</b> .....	<b>40</b>
3.4.1 IDW .....	41
3.4.2 Spline .....	41
3.4.3 Topo to raster.....	42
<b>3.5. Estimación de las alturas niveladas y comparación de superficies.</b> ....	<b>42</b>
3.5.1 Estimación de las alturas niveladas (H) .....	43
3.5.2 Comparación y diferencias entre superficies.....	43
<b><i>CAPÍTULO IV</i></b> .....	<b>45</b>
<b>4.1. Resultado del análisis exploratorio de los datos.</b> .....	<b>45</b>
4.1.1 Análisis estadístico para las alturas elipsoídicas.....	45

4.1.2	Análisis estadístico para las ondulaciones del geode. ....	50
<b>4.2.</b>	<b>Resultado del análisis estructural de los datos. ....</b>	<b>54</b>
<b>4.3.</b>	<b>Resultado de la estimación de las superficies. ....</b>	<b>57</b>
4.3.1	IDW .....	58
4.2.2	Spline .....	60
4.2.3	Topo to Raster .....	62
4.2.4	Resultado de la estimación de las alturas niveladas calculadas. ....	64
<b>4.4.</b>	<b>Comparación y diferencias de las superficies.....</b>	<b>67</b>
<b><i>CAPÍTULO V</i></b>	<b>.....</b>	<b>71</b>
<b><i>Bibliografía</i></b>	<b>.....</b>	<b>74</b>
<b><i>Anexos</i></b>	<b>.....</b>	<b>78</b>

## RESUMEN

En el presente proyecto de investigación, se usaron los Sistemas de Información Geográfica para la estimación de las alturas niveladas a partir del modelo geoidal global EIGEN-6c4.

Con el fin de obtener una superficie continua y considerando las alturas elipsoídicas para el cálculo de las alturas niveladas de Costa Rica, se trabajó con los métodos de interpolación geoestadísticos IDW, Spline y Topo to raster. Se usaron los datos de entrada a puntos con coordenadas geodésicas ( $\varphi$ ,  $\lambda$  y  $h$ ), provenientes de diferentes fuentes de información; además de los datos deducidos del modelo geoidal global EIGEN-6c4.

A partir de la información recabada, se hizo un análisis exploratorio de las variables, mostrando el comportamiento de la distribución normal los valores extremos, además las tendencias de los datos, con ello se trabajó con el histograma, una evaluación del gráfico de normalidad y los gráficos de semivarianza y covarianza.

Posteriormente, se hizo el análisis estructural para cada uno de los interpoladores, obteniendo como resultado las superficies de predicción para cada variable, luego con esa diferencia las superficies de alturas niveladas.

Finalmente, se realizaron diferencias, respecto de las alturas oficiales del Instituto Geográfico Nacional (IGN) con la superficie antes calculadas. Se obtuvo a través de diferentes métodos de interpolación, el interpolador con mejor grado de compatibilidad con la referencia vertical del país, y la recomendación de una posible metodología para el cálculo de alturas ortométricas teniendo valores medidos con GNSS.

## **Lista de tablas**

Tabla 1. Resumen de fuentes de información para las alturas elipsóidicas.....	30
Tabla 2. Diferencias de superficie calculada H, con el interpolador IDW y los bancos de nivel oficial de Costa Rica. ....	68
Tabla 3. Diferencias de superficie calculada H con el interpolador Spline y los bancos de nivel oficiales de Costa Rica.....	68
Tabla 4. Diferencias de superficie calculada H con el interpolador Topo to raster y los bancos de nivel oficiales de Costa Rica. ....	68
Tabla 5. Resumen de menores diferencias por interpolador.....	69

## Lista de gráficos

Gráfico 1. Histograma de frecuencia de los datos para las alturas elipsoídicas h.	46
Gráfico 2. Gráfico de probabilidad normal Q-Q, para las alturas elipsoídicas.....	48
Gráfico 3. Nube del semivariograma para las alturas elipsoídicas h.....	49
Gráfico 4. Nube de Covarianza para las alturas elipsoídicas.....	50
Gráfico 5. Histograma para los valores de ondulación del geoide. ....	51
Gráfico 6. Gráfico de probabilidad normal Q-Q, para las ondulaciones del geoide N. .....	52
Gráfico 7. Nube del semivariograma para las ondulaciones del geoide N. ....	53
Gráfico 8. Nube de covarianza para las ondulaciones del geoide N. ....	54
Gráfico 9. Predicción y errores del interpolador IDW, para la variable de alturas elipsoídicas h. ....	55
Gráfico 10. Predicción y errores del interpolador IDW, para la variable de ondulacion del geoide N. ....	56
Gráfico 11. Predicción y errores del interpolador Spline, para el variable de alturas elipsoídicas h ....	56
Gráfico 12. Predicción y errores del interpolador Spline, para el variable de ondulaciones del geoide N. ....	57

## Lista de figuras

Figura 1. Ficha de campo de Banco de Nivel #66, ubicado en la ciudad de Heredia. .....	3
Figura 2. Altura elipsoídica.....	9
Figura 3. Nivelación geométrica.....	11
Figura 4. Superficies de nivel y línea de plomada.....	12
Figura 5. Esquema de la relación de la ondulación del geoide. ....	13
Figura 6. Modelo Geoidal de Costa Rica, calculado a partir del modelo geoidal global EIGEN-6c4. ....	15
Figura 7. Publicación de coordenadas geocéntricas para la red SIRGAS. Semana 1974. ....	23
Figura 8. Captura de pantalla de la tabla de atributos de las alturas elipsoidales usadas en el proyecto. ....	30
Figura 9. Página de ICGEM. Descarga de valores geoidales para el país. ....	32
Figura 10. Ondulaciones del geoide, modelo EIGEN-6c4.....	33
Figura 11. Formato de salida del modelo EIGEN-6c4.....	33
Figura 12. Puntos seleccionados del modelo.....	34
Figura 13. Red vertical oficial de Costa Rica.....	35
Figura 14. Interfaz para selección de la exploración de los datos.....	36
Figura 15. Interfaz de geostatistical analyst para el análisis estructural de los interpoladores. ....	38
Figura 16. Interfaz para generación de la superficie interpolada, para las alturas	

elipsoidales. ....	38
Figura 17. Interfaz de geostatistical wizard, previa al calculo de superficie interpolada para las alturas elipsoídicas. ....	39
Figura 18. Interfaz que muestra el resultado para las alturas elipsoidales.....	40
Figura 19. Interfaz para el interpolador Topo to raster. ....	42
Figura 20. Ejemplo de tabla atributos para las diferencias con el interpolador IDW. ....	44
Figura 21. Resumen estadístico para las alturas elipsoídicas.....	45
Figura 22. Ejemplo de cálculo, superficie H del interpolador IDW.....	65

## Lista de mapas

Mapa 1. Red de estaciones SIRGAS en Costa Rica.....	23
Mapa 2. Red de estaciones del proyecto MARVEL-CR.....	25
Mapa 3. Red pasiva geodésica Nacional de primer y segundo orden de Costa Rica .....	26
Mapa 4. Red de puntos GPS del ICE.....	27
Mapa 5. Distribución de los BN del IGN.....	28
Mapa 6. Distribución de datos de las fuentes de información. ....	29
Mapa 7. Superficie generada del interpolador IDW para la variable de alturas elipsoidicas h.....	59
Mapa 8. . Superficie generada del interpolador IDW para la variable N.....	60
Mapa 9. Superficie generada del interpolador SPLINE para la variable de alturas elipsoidicas h.....	61
Mapa 10. Superficie generada del interpolador SPLINE para la variable de ondulaciones del geoide N. ....	62
Mapa 11. Superficie generada del interpolador Topo To Raster para la variable h. .....	63
Mapa 12. Superficie generada del interpolador Topo To Raster para la variable N. .....	64
Mapa 13. Superficie de alturas niveladas H con el interpolador IDW.....	65
Mapa 14. Superficie de alturas niveladas H con el interpolador Spline.....	66
Mapa 15. Superficie de alturas niveladas H con el interpolador Topo to raster. ...	67

# CAPÍTULO I

## 1. Introducción

Con la realización de la siguiente investigación se desarrolló una metodología para el modelamiento de la superficie terrestre en Costa Rica dada por las denominadas alturas niveladas. Estas variables se obtuvieron como resultado de observaciones directas realizadas con GNSS y los datos de un moderno modelo global del geoides,

Las alturas niveladas, denominadas en diferentes contextos como alturas ortométricas, representan el comportamiento de la superficie terrestre (superficie topográfica). Este tipo de altura física es el resultado de diversos procesos convencionales de medición llamados comúnmente nivelación, en los que se utiliza un instrumento orientado verticalmente según la dirección de la gravedad (Moya et al, 2017).

El proceso descrito anteriormente da como resultado la diferencia de elevación entre los puntos de la superficie terrestre respecto a una referencia. Estas líneas o circuitos de nivelación generalmente partían de puntos en los cuales se efectuaban observaciones del nivel medio del mar con mareógrafos. De esta manera los países implementaban sus diferentes redes geodésicas verticales. En el caso de Costa Rica, la red vertical se inició en los años 1940 y la misma prácticamente no ha sido actualizada.

Actualmente estos procesos de nivelación se siguen efectuando sin embargo, la rapidez en las mediciones GNSS y la calidad de sus resultados permiten contar con nuevas variables para el conocimiento de la superficie terrestre. De manera general un punto sobre esta superficie terrestre puede contar, por un lado, con altura nivelada producto del proceso de nivelación y referida al mareógrafo y por otro lado con altura derivada de las mediciones GNSS. Lamentablemente la coordenada vertical obtenida por esta metodología de medición no describe la superficie terrestre por cuanto, estas alturas contemplan una referencia diferente a la de las alturas niveladas. Como se expondrá en este trabajo de investigación la relación

entre ambas alturas está dada por la denominada ondulación del geode, parámetros que específicamente fueron obtenidos del modelo EIGEN-6c4.

Una opción para el modelamiento de la superficie terrestre fue implementación de los Sistemas de Información Geográfica, que constituyen una poderosa herramienta que permite realizar cálculos y procesos de interpolación de una superficie con datos continuos de una forma rápida y eficaz. Específicamente en este proyecto se partió de dos fuentes de datos: los valores de la ondulación del geode derivado del modelo geoidal global llamado EIGEN-6c4 y de alturas elipsoídicas de diversas fuentes. Además, con la ventaja de que se puede hacer una evaluación de la calidad tanto de los datos de partida como de los métodos de interpolación. Lo anterior permitió estimar una superficie de alturas niveladas para Costa Rica, basada en un ajuste geoespacial estadístico.

### **1.1 Planteamiento del problema**

Costa Rica inició con el establecimiento de la red geodésica vertical o referencia altimétrica a partir de los años 1940. Esta red geodésica se extiende a lo largo de las carreteras principales y líneas de ferrocarril, pasando por las principales ciudades del país y vinculando ambas costas (IGN, 2011). La red original estuvo compuesta por 4624 bancos de nivel que fueron nivelados geoméricamente en su gran mayoría, y cuya referencia se dio a partir de los registros mareográficos de Limón y Puntarenas que se extendieron por períodos de observación de entre 10 y 20 años (IGN, 2011).

De la totalidad de los bancos de Nivel (BN) que se establecieron en el país, muchos han desaparecido por diferentes razones, como el recarpeteo o ampliación de vías y otros fueron colocados en casas de habitación donde generalmente por falta de una ubicación más precisa es casi imposible dar con ellos (IGN, 2011). Estos hechos han generado una pérdida considerable de la referencia vertical, en Costa Rica, específicamente las alturas niveladas, la cual es fundamental para dar sustento a toda la actividad topográfica, geodésica, catastral, de infraestructura civil entre otras. Lo ideal sería que estas y otras actividades trabajen un sistema

moderno y unificado, que permita relacionar entre sí los distintos proyectos.

El Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica (IGN) tiene dentro de sus tareas inherentes el mantenimiento de la red geodésica nacional en su parte horizontal tanto como vertical (IGN, 2011). Por diferentes motivos, a IGN se le ha dificultado estas labores de mantenimiento geodésico de las redes oficiales (IGN, 2011). Por ejemplo, los valores de las alturas de los BN están consignadas en las denominadas fichas de campo (Figura 1) en la cual se asienta el valor de la altura de cada punto. En un país con alta actividad volcánica y sísmica, muchas de las veces el valor dado en las fichas difiere del valor que se mide directamente en el campo. Este hecho conlleva una serie de implicaciones técnicas que requieren de un tratamiento especial sobre todo si además se realizan mediciones modernas como lo es el Sistema Global de Navegación por Satélite, por sus siglas en ingles GNSS.

COUNTRY <b>Costa Rica</b>	TYPE OF MARK <b>Disco de bronce de 9 cms. Empotrado en acera</b>	DESIGNATION OF MARK <b>66</b>
PROVINCE, STATE OR DEPARTMENT <b>Heredia</b>	ESTABLISHED BY (AGENCY) <b>I.G.C.R.</b>	ELEVATION <b>1135.9221</b> (FEET) (M)
MUNICIPALITY, COMMUNITY OR REGION <b>Heredia</b>	AGENCY (CAST IN MARK) <b>I.G.C.R.</b>	<b>RECOVERY NOTES</b> (FINAL) (RELIM.)
LINE <b>Puntarenas-Puerto Limón (1948-1949)</b>	MARK IS STAMPED <b>66</b>	
DESCRIPTION <b>La referencia de nivel está situada en la ciudad de Heredia, 400 metros al Sur de la parroquia, en la estación del ferrocarril de Costa Rica; empotrado a ras, en el andén del lado Sur a 4.57 metros de su borde Este y 2.10 metros de su borde Sur; 3.85 metros al Norte del eje de la ruta que es vía férrea de 1.07 metros de ancho, tendida sobre la avenida 3ª. El disco está al Oeste 10.70 metros de un poste telegráfico de riel; al N60E a 5.06 metros de la esquina SE del andén de granito; 10.35 metros al N20W del centro de la tapa circular de registro de alcantarilla. El eje de la avenida 3ª frente a la referencia está 0.60 metros más bajo; sobre dicho eje, 30 metros al Este 0.70 metros más bajo y 30 metros al Oeste 0.50 metros más bajo que la referencia.</b>		SKETCH 
(DESCRIBED) OR (RECOVERED) BY: <b>A. Rivero</b> AGENCY <b>I.G.C.R.</b>		DATE <b>Dic. 7, 1955.</b>

Figura 1. Ficha de campo de Banco de Nivel #66, ubicado en la ciudad de Heredia.  
Fuente: IGN

Las mediciones derivadas de observaciones GNSS son valores de índole geométricas, es decir se refieren a un sistema cartesiano tridimensional geométrico (coordenadas geocéntricas: X, Y, Z) (Hoffman-Wellenhof et al, 2008). Estos valores se pueden convertir posteriormente a dos componentes angulares horizontales

denominadas latitud y longitud; y un componente métrica vertical (h) denominada altura. Si la superficie de referencia para las tres coordenadas anteriores es un elipsoide de revolución (sólido obtenido a partir del giro de una elipse alrededor de eje menor) dichas componente se conocen como coordenadas geodésicas ( $\varphi$ ,  $\lambda$  y h). Hoffman-Wellenhof et al, 2008). Lo anterior implica que para un punto ubicado en la superficie topográfica se pueden tener dos valores de referencia vertical, la dada por las nivelaciones geométricas (ver apartado 1) que denominaremos altura nivelada (H) y el valor dado por el GNSS, que denominaremos altura elipsoídicas (h) (Lu et al, 2014). La relación entre ambas está dada por una magnitud lineal llamada ondulación del geoide (ver apartado 1) (N) (Lu et al, 2014).

En este proyecto de graduación se realizó un estudio en el que se utilizaron diferentes modelos de interpolación dentro de los Sistemas de Información Geográfica (SIG), para generar una superficie de alturas niveladas para Costa Rica correspondiente con la superficie topográfica y partiendo de los valores de ondulación del geoide (N) del modelo global del Geoide EIGEN- 6C4 y los valores de altura elipsoídicas (h) de una serie de puntos distribuidos en el territorio nacional, al igual que su comparación con los valores oficiales de los bancos de nivel del Instituto Geográfico Nacional. (Ver figura 2)

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo general:**

Desarrollar una metodología para la estimación de las alturas niveladas de Costa Rica a partir de los métodos de interpolación de los Sistemas de Información Geográficos.

### **1.2.2 Objetivos específicos:**

- Aplicar un análisis exploratorio de la información de alturas elipsoídicas (h) y de los valores de ondulación del geoide (N) derivados del modelo global EIGEN-6C4 para el comportamiento de los datos que se aplicarán a los diferentes métodos de interpolación.

- Ejecutar el cálculo y modelado de las superficies (análisis estructural) de los diferentes modelos de interpolación mediante las herramientas contenidas en los Sistemas de Información Geográfica.
- Comparar la predicción de las superficies calculadas y los resultados de los métodos de interpolación mediante los valores oficiales dados por el Instituto Geográfico Nacional de Costa Rica para cuantificar las diferencias de ambas superficies.

### **1.3 Justificación del problema**

La base de datos con las alturas niveladas (alturas ortométricas) de Costa Rica, contiene aproximadamente 4600 puntos los cuales son producto de las diferentes campañas de medición vertical realizadas desde la década de 1940. Esta información es de carácter público y es administrada por el IGN. Sin embargo, el mantenimiento y actualización de sus valores (coordenadas) no se ha hecho en su totalidad; dando como resultado una desactualización total, implicando que los usuarios de estos datos deban trabajar y desarrollar proyectos considerando los valores originales de alturas de la red geodésica vertical de Costa Rica.

Por otro lado, el uso frecuente de los sistemas de medición GNSS les ha permitido a estos mismos usuarios obtener una coordenada vertical geométrica de una manera rápida. Lamentablemente ambas coordenadas verticales no coinciden de acuerdo a su naturaleza: la nivelada tomando como referencia el geoide y la elipsoídica tomando de referencia el elipsoide (ver figura 2). Como ya se ha expuesto la relación entre ambas superficies es una distancia vertical denominada ondulación del geoide (ver figura 2). El cálculo de este parámetro es complejo debido a la gran cantidad de variables de tipo físico que se deben considerar sin embargo, actualmente existen diferentes modelos globales que ofrecen una estimación de la ondulación del geoide.

Es por lo anterior que en este proyecto de graduación se quiere aprovechar la gran cantidad de datos de alturas elipsoídicas de diversas fuentes junto con los valores de ondulación del geoide derivados del modelo global EIGEN-6C4 de acceso libre y mediante el uso de Sistemas de Información Geográfica aplicar diferentes tipos de interpoladores y generar superficies terrestres para Costa Rica. Estas superficies serán posteriormente validadas respecto a la superficie terrestre calculada por los datos oficiales del IGN.

Los resultados generados de esta investigación permitirán obtener valores de alturas niveladas para todo el país, cuyo uso e interpretación dependerán de la finalidad de los usuarios; ya que los modelos de interpolación empleados brindan información finita en una superficie modelada. Lo anterior no corresponde estrictamente con la realidad, pero la metodología propuesta ofrecerá una primera aproximación de la superficie terrestre de Costa Rica a partir de mediciones GNSS y el modelo del geoide; dándose también una estimación del grado de compatibilidad nacional de estos datos respecto de los datos medidos directamente.

Finalmente se espera que los resultados obtenidos ofrezcan una posibilidad a los usuarios que requieran de una aproximación para las alturas niveladas; por lo que el acceso a las dos fuentes de datos citadas justifica el cálculo por interpolación de esta superficie para Costa Rica.

## CAPITULO II

### 2. MARCO TEÓRICO

#### 2.1 Conceptos fundamentales

Para comprender los conceptos asociados a la estimación de las alturas niveladas, se discuten o comentan a continuación los aspectos relevantes con estas temáticas. Es así que se entiende que las diferencias de elevación observadas entre un punto en la superficie terrestre se obtienen tradicionalmente mediante la nivelación geométrica o de precisión. Las necesidades de control vertical dentro de diferentes ramas de la ciencia, han sido atendidas por esta técnica (Sánsó et al, 2013). También muchas veces esas diferencias pueden ser medidas por nivelaciones trigonométricas y mediciones GNSS. (Lu et al, 2014)

Sin embargo, los puntos sobre la superficie de la tierra están asociados generalmente a tres coordenadas, latitud ( $\varphi$ ), longitud ( $\lambda$ ) y altura ( $h$ ). La latitud y la longitud se refieren al elipsoide de revolución y son designadas precisamente a latitud y longitud geodésicas. Este elipsoide es una figura matemática que se elige de alguna manera para ajustarse al nivel medio del mar, ya sea a nivel mundial o sobre alguna región. Se asume que el centro de masa de la tierra y el eje menor del elipsoide está alineado con el polo de referencia de la tierra. La altura de un punto puede referirse a este elipsoide, al igual que la latitud y la longitud, esta altura comúnmente es llamada altura elipsoídica ( $h$ ) (Jekeli, 2000). Estos valores son obtenidos a partir de las mediciones GNSS y para poder usar las alturas deben referirse al nivel medio del mar que es lo que conocemos como alturas niveladas ( $H$ ) (datum vertical). Es importante conocer que las superficies elipsoidales difieren del nivel medio del mar entre los 30m hasta los 110m (Jekeli, 2000).

En Costa Rica como en los países de la región, las redes verticales oficiales de primer, segundo y tercer orden fueron medidas por los Institutos Geográficos Nacionales y por la agencia estadounidense Inter American Geodetic Survey (IAGS). Muchos de los BN se colocaron en lugares estratégicos para el acceso de

los mismos y hasta el momento su mantenimiento por el IGN ha sido difícil, a diferencia de la red horizontal que ha venido actualizándose. Actualmente se mantiene el Sistema de Referencia CR05 como oficial (época 2005,83, ITRF2000), pero Costa Rica cuenta con una red de estaciones de medición continua asociadas al Sistema de Referencia Geocéntricos para las Américas (SIRGAS) y que proveen al país de un datum horizontal actualizado y referido al Marco Internacional de Referencia Terrestre (ITRF14). No obstante, este marco no es oficial, pero puede ser utilizada como referencia geodésica, debida a la alta precisión con las que son calculadas sus coordenadas. Por lo tanto, en la mayoría de los países se trabajan de forma separada las redes verticales y horizontales.

Tanto en el país como en lugares de la región se debe considerar según Sánchez, 2002, que las alturas oficiales para las redes verticales de los países son cantidades meramente geométricas, que en forma de redes de nivelación han sido ajustadas, asumiendo el efecto del campo de gravedad como un error más de medición. Esto genera inconsistencias tanto en la definición del datum vertical como la omisión del campo de gravedad en la nivelación; por lo que al derivar la componente vertical a partir de la combinación de las nuevas técnicas geodésicas de posicionamiento como el GPS con modelos geoidales gravimétricos de alta resolución; Sánchez, 2002, sugiere la adopción de alturas físicas, alturas reducidas por el efecto de gravedad como parte de la definición y realización de un sistema vertical de referencia moderno.

## **2.2 Tipos de alturas**

Se puede considerar de manera general, las alturas elipsoidales ( $h$ ) y las alturas ortométricas ( $H$ ), pero a nivel geodésico se tratan otras y dependen de la selección que se haga del valor de la gravedad como son las alturas dinámicas y las alturas normales. Pero para el presente proyecto se desarrollarán solo términos de  $h$  y  $H$ .

### 2.2.1 Altura Elipsoidal (h)

La altura elipsoidal resulta de la proyección de un punto de manera normal sobre el elipsoide escogido. Existen diferentes elipsoides locales que se utilizan principalmente porque se ajustan a una porción particular de la tierra mejor que los elipsoides globales, pero no son coincidentes con el centro de masa de la tierra, a diferencia de los globales. (Hoffman-Wellenhof et al, 2008), como por el ejemplo el elipsoide WGS84.

Las alturas elipsoidales entre dos puntos en la superficie de la tierra pueden ser obtenidas de mediciones de posicionamiento satelital (ver figura 2) o bien con nivelación trigonométrica, las alturas niveladas (H) pueden ser calculadas con las correcciones adecuadas a alturas elipsóidicas (h) y viceversa.

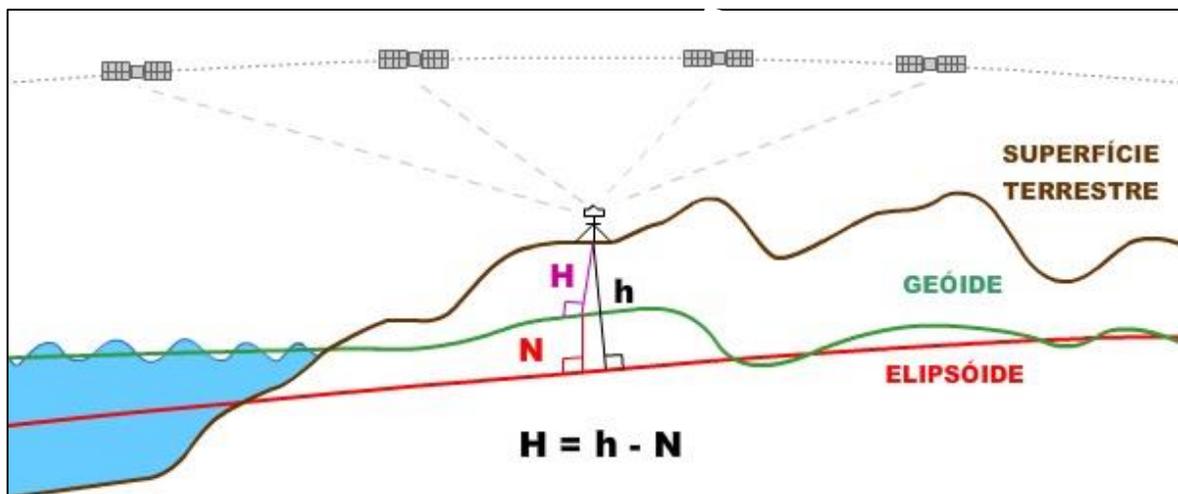


Figura 2. Altura elipsoidal  
Fuente: [www.ibge.gov.br](http://www.ibge.gov.br)

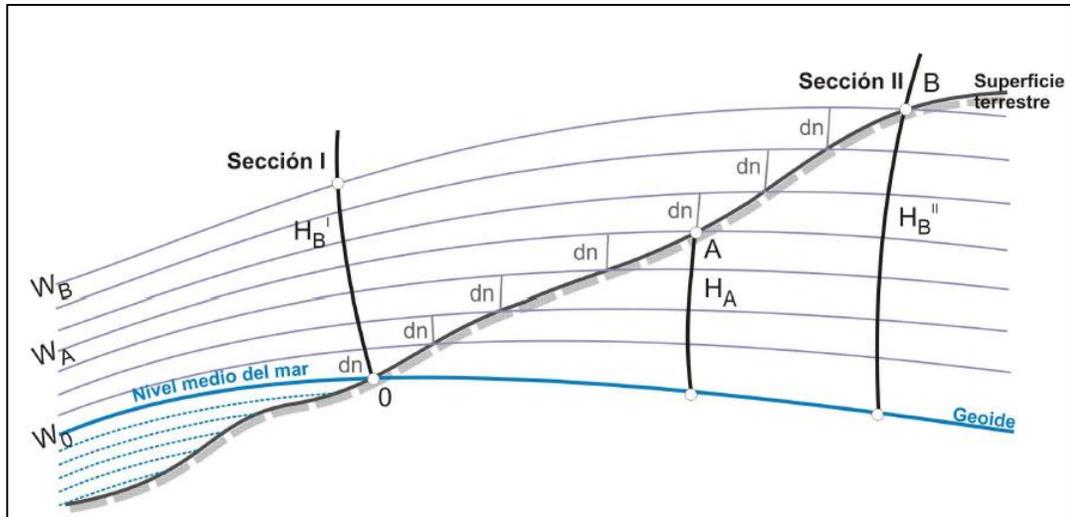
## 2.2.2 Altura Ortométrica (H)

### Nivelación geométrica

La nivelación geométrica proporciona una diferencia de altura entre dos puntos, apuntando con el nivel a las miras graduadas sucesivamente a dos puntos extremos, y aplicando una simple diferencia corresponderá a un desnivel entre los puntos (Gemael, 2012), también llamada diferencia de cotas geométricas (Cano et al, 2011). Al colocar el nivel a distancias iguales en las miras neutraliza la influencia de la curvatura terrestre y la refracción. (Gemael, 2012).

Asimismo, en la nivelación geométrica el sistema de medición se orienta verticalmente según la línea de la plomada del campo de gravedad terrestre, por tanto, el plano horizontal del instrumento coincide con la línea tangente a la superficie equipotencial que pasa por el punto de observación. Por lo que, las diferencias de nivel ( $dn$ ) (ver figura 3) medidas corresponde con la sección de la línea de la plomada, que coincide con el eje vertical de las miras, entre la superficie terrestre y la tangente a la equipotencial realizada por el instrumento (Sánchez et al, s.f).

La separación entre dos superficies equipotenciales varía con la gravedad en proporción inversa, estas no son paralelas y en consecuencia la determinación alturas mediante la nivelación óptica se ve altamente influenciada por el campo de gravedad terrestre. Las diferencias de nivel medidas, además de contener errores aleatorios de observación, impiden que las alturas niveladas sean utilizadas directamente y obliga su corrección por el efecto de gravedad en diferencias de potencial (Sánchez et al, s.f).

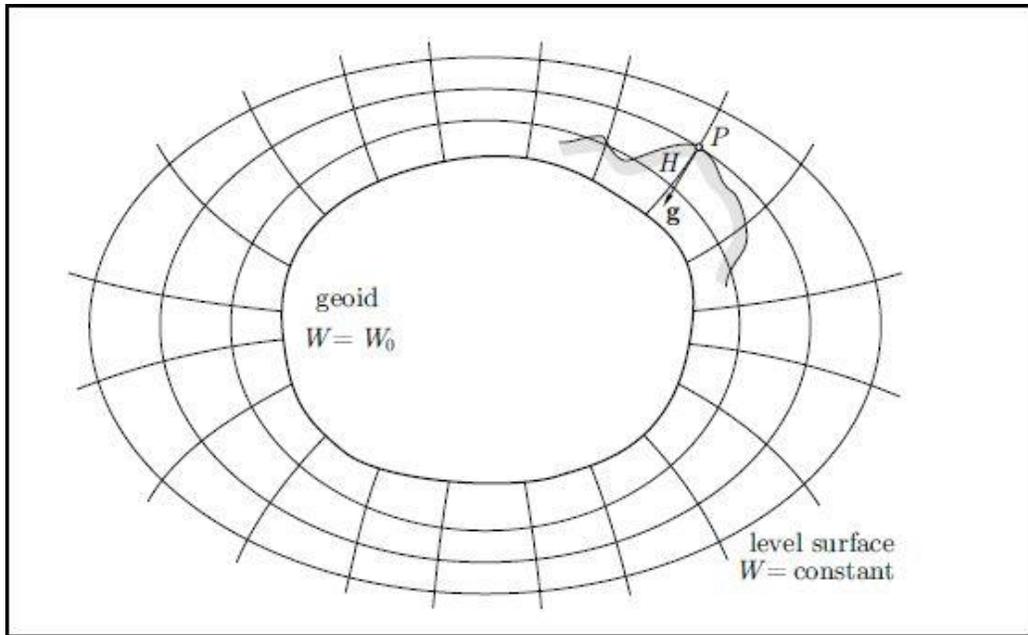


**Figura 3. Nivelación geométrica.**  
Fuente: (Sánchez et al, s.f)

### Altura ortométrica (H)

La superficie de referencia de las alturas ortométricas es el geoide, esta esta definida como la distancia que existe entre el geoide y un punto medido sobre la línea de la plomada. La altura ortométrica es un valor con significado geométrico, y además caracterizado por un significado físico ya que su cálculo exacto requiere conocer la verdadera posición del geoide (Mena, 2007). Tal como se ve en la figura 4, la altura ortométrica (H) de un punto arriba del nivel del mar es medida a lo largo de la línea de la plomada curvada, iniciando en el geoide. (Hofmann-Wellenhof & Moritz, 2005)

El término geoide fue introducido por Listing en el año 1873, que significa “*forma de la tierra*”. El geoide es un esferoide tridimensional que constituye una superficie equipotencial imaginaria que resulta de suponer la superficie de los océanos en reposo y prolongada por debajo de los continentes y que sería la superficie de equilibrio de las masas oceánicas sometidas a la acción gravitatoria y a la fuerza centrífuga ocasionada por la rotación y traslación del planeta, de manera que la dirección de la gravedad es perpendicular en todos los lugares (Sauer, 2014).



**Figura 4. Superficies de nivel y línea de plomada.**  
**Fuente: (Hofmann-Wellenhof et al, 2005)**

Las alturas ortométricas se determinan mediante la siguiente ecuación (Hofmann-Wellenhof et al, 2005):

$$H = \frac{C}{\bar{g}}$$

Siendo,

$H =$  *Altura ortométrica*

$C =$  *cota geopotencial*

$\bar{g} =$  *gravedad promedio*

El cota geopotencial ( $C$ ) está definido por la diferencia de potencial entre dos puntos tomando en cuenta el valor de potencial ( $W$ ) en cada punto. Como diferencia de potencial, el numero geopotencial es independiente del itinerario de nivelación particular utilizado para relacionar el punto con el nivel medio del mar.

Y  $\bar{g}$  corresponde al valor medio de la gravedad medido a lo largo de la línea de la plomada entre el geode y el terreno (Arias et al, 2011).

### 2.2.3 Relación entre alturas

#### Ondulación del Geoide

La ondulación del geoide ( $N$ ) se refiere a la separación que existe entre el geoide al elipsoide de referencia, también llamada como altura geoidal o separación del geoide (Lu et al, 2014), tal como se indica en la figura 5:

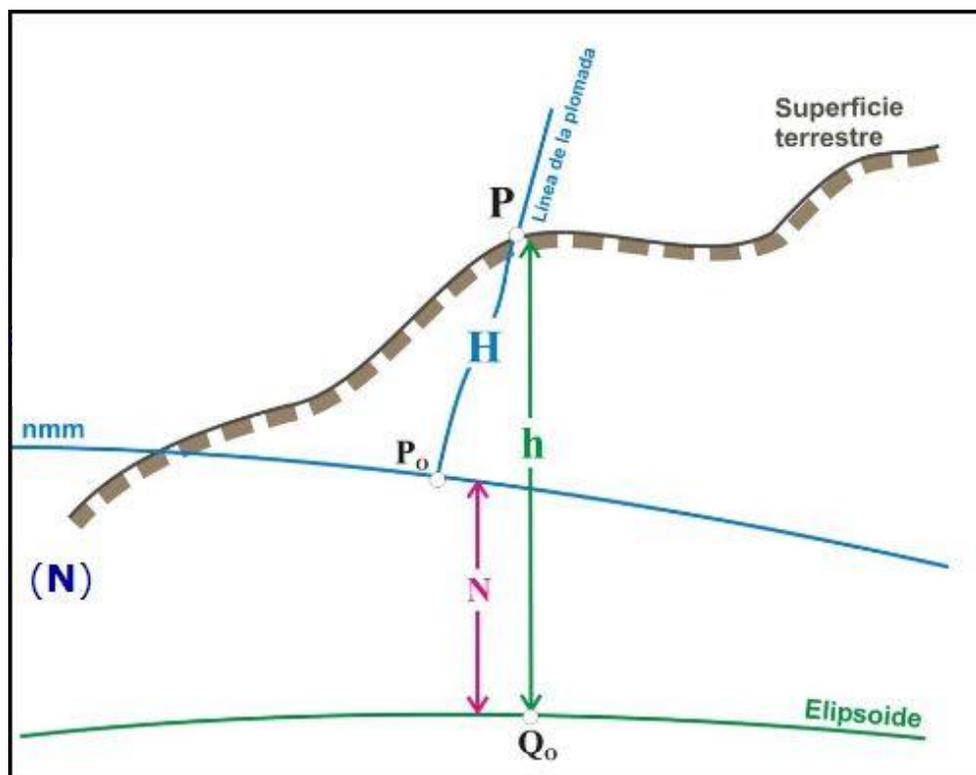


Figura 5. Esquema de la relación de la ondulación del geoide.  
Fuente: (Sánchez, 2002)

Sin embargo, esta puede ser aproximada a partir de la siguiente ecuación:

$$N = H - h$$

Donde:

$h$  = Altura elipsoidal

$H$  = Altura ortométrica medida sobre la normal al elipsoide, sobre la línea de la plomada.

$N$  = Ondulación del Geoide.

Al conocer al menos dos de los valores de cualquiera de las tres componentes, es posible deducir la tercera, en el caso del proyecto se tienen los valores de las alturas elipsoidales ( $h$ ), y los valores de ondulación del geoide ( $N$ ) deducidos de un modelo, y por consiguiente  $H$  puede ser calculada.

### **2.3 Modelo EIGEN-6C4**

El modelo EIGEN-6C4, es un modelo combinado gravitacional global, el cual permite calcular los valores de ondulación del geoide. Este modelo EIGEN-6c4 es un modelo combinado que incluye datos satelitales, terrestres y aerotransportados construido a partir de armónicos esféricos hasta el orden y grado 2190 por el trabajo conjunto del GFZ Postdam y el GRGS/CNES Toulouse (Förste et al, 2014) (Linares et al, 2015).

El modelo fue generado tomando los datos LAGEOS-1/2 SLR (Satellite Laser Ranging) de GRGS, los datos de la misión GRACE GPS-SST y la misión GOCE que comprenden datos SGG (Satellite Gravity Gradiometry) y por último la información de mallas globales de anomalías gravimétricas de 2'x2' sobre los océanos y EGM2008 sobre los continentes hasta el grado/orden 2190. Este modelo incluye nuevos datos respecto al EGM08 y una mejora sustancial ya evaluada en otros lugares del mundo (Linares et al, 2015).

Además, el EIGEN-6c4 puede ser descargado desde la página oficial del ICGEM (International Centre for Global Earth Models), donde se permite desplegar los datos del modelo e indicar el lugar de interés mediante coordenadas geodésicas. Tal como se muestra en la siguiente figura, el mapa del modelo geoidal para el país, con una

grilla de 0,1°X 0,1°.

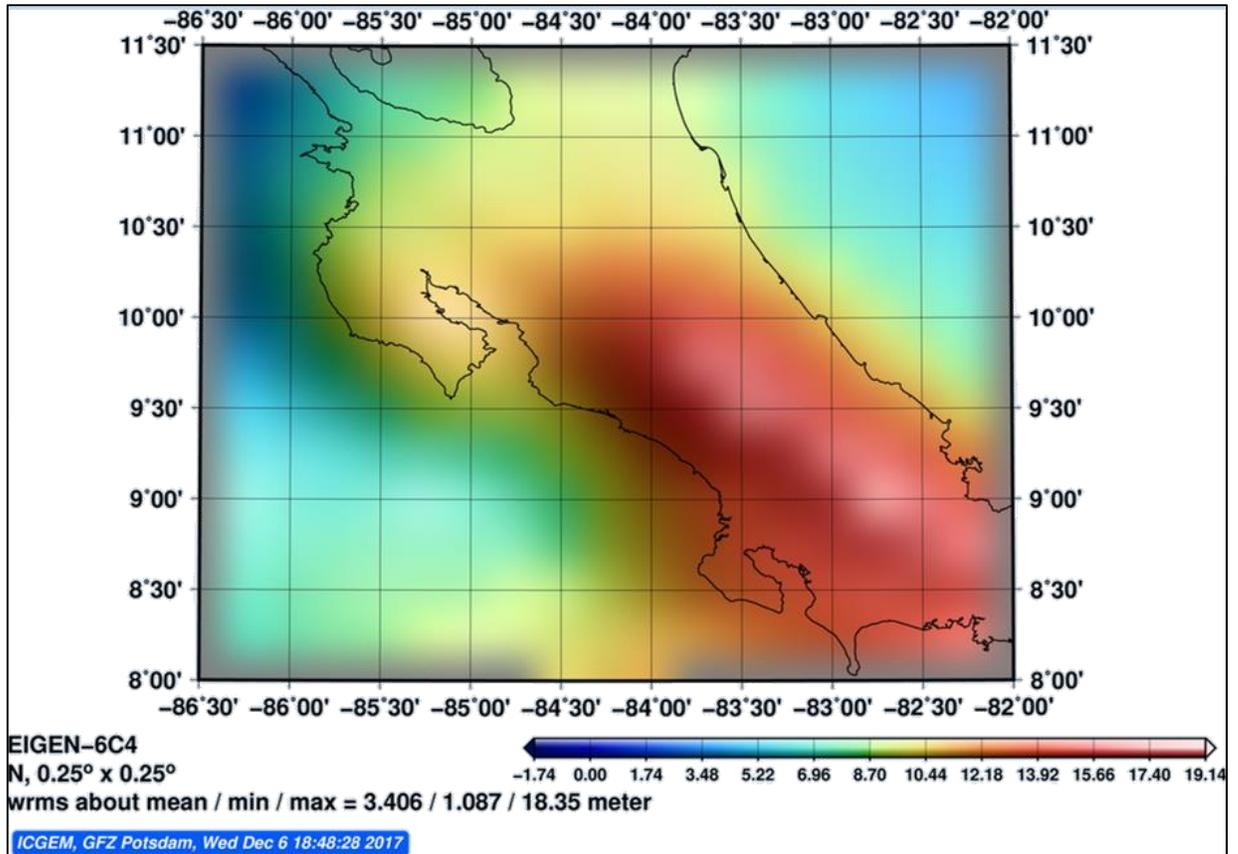


Figura 6. Modelo Geoidal de Costa Rica, calculado a partir del modelo geoidal global EIGEN-6c4.

Fuente: [www.icgem.gfz-postdam.de](http://www.icgem.gfz-postdam.de)

## 2.4 Geoestadística.

El término geoestadística fue definido y empleado por Georges Matheron (matemático y geólogo francés), Matheron desarrolló la teoría de las variables regionalizadas, dio una formulación rigurosa y la solución al problema de predicción y la definió como la aplicación del formalismo de las funciones aleatorias al reconocimiento y estimación de los fenómenos naturales (Matheron, 1965).

Desde años anteriores, se citaban trabajos de geoestadística, de Sichel (1947 y 1949) y de Krige (1951), este último, geólogo, propuso un variante del método de medias móviles, considerado como el equivalente al krigeado simple, y es uno de los métodos de estimación lineal en el espacio con mayores cualidades teóricas (Giraldo, 2002), y del cual Matheron dio soporte a los métodos de interpolación estocásticos. (Arce, 2016)

Varios autores han definido la geoestadística como una rama de la estadística que trata fenómenos espaciales (Journel et al, 1978). Su interés primordial es la estimación predicción y simulación de dichos fenómenos (Myers, 1987); además como una herramienta que ofrece describir la continuidad espacial, y proporciona adaptaciones de las técnicas clásicas de regresión para tomar ventajas de esta continuidad (Isaaks et al, 1989).

Por otro lado, es importante tomar en cuenta que el análisis geoestadístico se compone de pasos o etapas ante el desarrollo de procesos investigativos donde se sugieren tres pasos:

- El análisis exploratorio de los datos.
- El análisis estructural.
- Las predicciones.

Sin embargo, es necesario conocer de los términos de variable regionalizada  $Z(x)$ , como aquella distribuida en el espacio de manera tal que presenta una estructura espacial de correlación, así mismo propone una definición más rigurosa matemáticamente equivalente, que consiste en decir que una variable regionalizada

es una variable aleatoria  $z$  definida en un punto del espacio  $x$ .

En el caso general donde  $x$  es un punto en el espacio tridimensional, es decir  $x: (x_1, x_2, x_3)$ , la variable aleatoria incluida en un conjunto de conceptos, se describe de la siguiente forma: si cada punto  $x$  que pertenece a un dominio en el espacio le hacemos corresponder un variable aleatoria  $Z(x)$ , que en sentido general pueden ser dependientes, entonces el conjunto de variables aleatorias espacialmente distribuidas  $\{Z(x), x \in \Omega\}$  será una función aleatoria  $Z(x)$  (Cifuentes, 2016).

Por otra parte, la aplicación de la geoestadística para la estimación de reservas de minas es probablemente su uso mejor conocido, sin embargo las técnicas de estimación pueden ser utilizadas dondequiera que se hace una medición continua en una muestra, en un espacio o tiempo particular, donde el valor muestral es afectado por su posición y su relación con los vecinos (Moreno, 2009) .

Al mismo tiempo, el uso de la geostatística se ha ido ampliando en diferentes campos en el transcurso del tiempo como la hidrología, física del suelo, ciencias de la tierra y mas recientemente al monitoreo ambiental y al procesamiento de imágenes de satélite.

#### **2.4.1 Modelos de interpolación geoestadísticos**

La interpolación espacial es una técnica de análisis geoespacial con una amplia gama de aplicaciones, además de ser un procedimiento para predecir el comportamiento de un cierto fenómeno de interés en lugares donde no se ha medido (Dorman, 2014). Las dos principales tipos de métodos de interpolación espacial reconocidos son:

*Modelos determinísticos:* en los que los valores del modelo de parámetros son determinados arbitrariamente.

*Modelos estadísticos:* y cuyos los valores del modelo de parámetros son estimados objetivamente desde datos específicos calibrados.

Ambos modelos hacen predicciones, pero los modelos determinísticos son

predefinidos usando formulas fijas para predecir valores calculados a diferencia de los modelos estadísticos utiliza los datos dos veces, primero para ajustar con precisión el modelo y luego para calcular los valores predichos. El IDW (Inverse Distance Weighted) y splines son modelos determinísticos, y ejemplos de modelos estadísticos son kriging y regresión ordinaria. (Dorman, 2014)

De la misma manera, en el proyecto se utilizaron el TIN (red irregular de triángulos), Kriging ordinario y Empirical Bayesian Kringing sin embargo, no se adaptaron a lo que se deseaba, por lo que se descartaron como herramientas de interpolación.

#### **2.4.2. Inverse Distance Weighting (IDW)**

Es un método matemático de interpolación que usa una función inversa de la distancia, parte del supuesto que las cosas que están más cerca son más parecidas, por lo tanto tienen más peso e influencia sobre el punto a estimar (Murillo et al, 2012).

El IDW se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$Z(S_0) = \sum_{i=1}^N \lambda_i * Z(S_i)$$

En el cuál:

$Z(S_0)$  = es el valor a predecir

$N$  = es el número de muestras alrededor del punto a predecir

$\lambda_i$  = son los pesos asignados a cada punto vecino y

$Z(S_i)$  = son los valores medidos.

Y los pesos de los puntos vecinos están dados por:

$$\lambda_i = \frac{d_{i0} - p}{\sum_{i=1}^N d_{i0} - p}$$

En el cuál

$d_{i0}$  = es la distancia entre el lugar de predicción  $S_0$

$S_i$  = el lugar muestral

$p$  = es un factor de reducción de peso, cuyo valor se encuentra minimizando el error cuadrático medio o error de predicción. (Murillo et al, 2012)

La técnica de IDW supone que la superficie entre dos puntos son suaves pero no diferenciales, por lo que la técnica de interpolación no permite un cambio brusco de altura. Cuanto más cercano este el valor vecino, más peso tiene la elevación o punto interpolada, los mejores resultados van a ser donde se encuentran un cantidad de muestras lo suficientemente densas. Es importante reconocer que ninguno de los métodos de interpolación asegura la corrección física o la fidelidad de una superficie generada. (Vieux, 2001)

#### **2.4.2. Spline**

El método de interpolación Splines, ajusta funciones polinómicas en un vecindario local. (U.Chile, s.f) El proceso se basa en una interpolación y unión continua de segmentos a partir de puntos cuya función polinomial está representada por:

$$p(x) = p_i(x) x_i < x < x_i + 1, i = 0, 1, \dots, k - 1 \quad i = 1, 2, \dots, k - 1$$

Donde los puntos  $x_i, \dots, x_{k-1}$  que dividen el intervalo  $(x_0, x_k)$  en k sub-intervalos, denominados puntos de quiebre, mientras que los puntos de la curva en esas posiciones se los llama nodos. (U.Chile, s.f)

Generalmente estas funciones polinomiales son de grado 1, 2 ó 3, llamadas sucesivamente lineales, cuadráticas o cúbicas.

Este interpolador permite modificar una serie de parámetros en función al tipo de topografía, por lo que no es recomendado para superficies con fluctuaciones marcadas; al igual que dependiendo de los datos de entrada, el nivel de error tolerable, la escala y los propósitos de estudio, el usuario podrá elegir entre uno u otro método. (U.Chile, s.f)

### **2.4.3 Topo to Raster**

El método de interpolación Topo to Raster fue diseñado específicamente para crear modelos digitales del terreno (MDT) hidrológicamente correctos. Lo cual permite crear superficies continuas a partir de líneas de curvas de nivel, y los métodos también contienen propiedades favorables para crear superficies para el análisis hidrológico (ESRI, 2018).

Este interpolador utiliza una técnica de interpolación de diferencia finita iterativa, el cual se optimiza para tener la eficacia computacional de los métodos de interpolación local, como la interpolación de IDW y sin perder la continuidad de la superficie de los métodos de interpolación global como Kriging y Spline. Esencialmente, resulta ser una técnica de spline de lámina delgada discretizada a la cual se le modifico la penalización de rugosidad para permitir que el DEM ajustado siga los cambios abruptos en el terreno como arroyos, crestas y acantilados (ESRI, 2018) .

El Topo to Raster resulta ser el único interpolador de ArcGIS® diseñado específicamente para trabajar de forma inteligente con entradas de curvas de nivel. Además que tiene como una gran ventaja imponer restricciones donde aseguren: las estructuras de drenaje conectado y la correcta representación de crestas y arroyos a partir de los datos de curvas de nivel de entrada (ESRI, 2018).

## CAPÍTULO III

### 3. METODOLOGÍA

En este capítulo se describen todos los procesos efectuados en el transcurso del proyecto, tanto la estandarización de la información como el análisis de los datos, generación de las superficies interpoladas y la comparación con datos oficiales del Instituto Geográfico Nacional.

#### 3.1 Recopilación y estandarización de información.

Como parte de la información requerida para el cálculo de las alturas ortométricas para Costa Rica y como se describió anteriormente, son necesarios los valores de las alturas elipsóidicas como la de las ondulaciones del geoide. Estos fueron tomados de diferentes proyectos y fuentes, y requirió de una estandarización para ser usado en un Sistema de Información Geográfica específicamente en ARCGIS® (versión 10.3). Se homogenizó la información de forma tal que todos los archivos estuviera en coordenadas geodésicas, por lo que fue necesario revisar todas las fuentes, realizar las transformaciones necesarias para cada caso en específico y generar las tablas para generar las tablas de atributos tanto para los valores de  $h$  y  $N$ .

##### 3.1.1 Fuente de información de las alturas elipsóidicas.

Para las alturas elipsóidicas se trabajó con cinco fuentes diferentes dentro de las cuales se describen a continuación el estado de partida, el datum y cantidad de puntos que conforma este insumo de trabajo.

Red SIRGAS de Costa Rica, datum IGS14, época 2017,80

Costa Rica cuenta con 14 estaciones de medición continua GNSS pertenecientes al Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas (SIRGAS), las cuales son procesadas cada semana por diferentes centros de procesamiento en el continente.

En Costa Rica, el Centro Nacional de procesamiento de datos GNSS (CNPDG), es

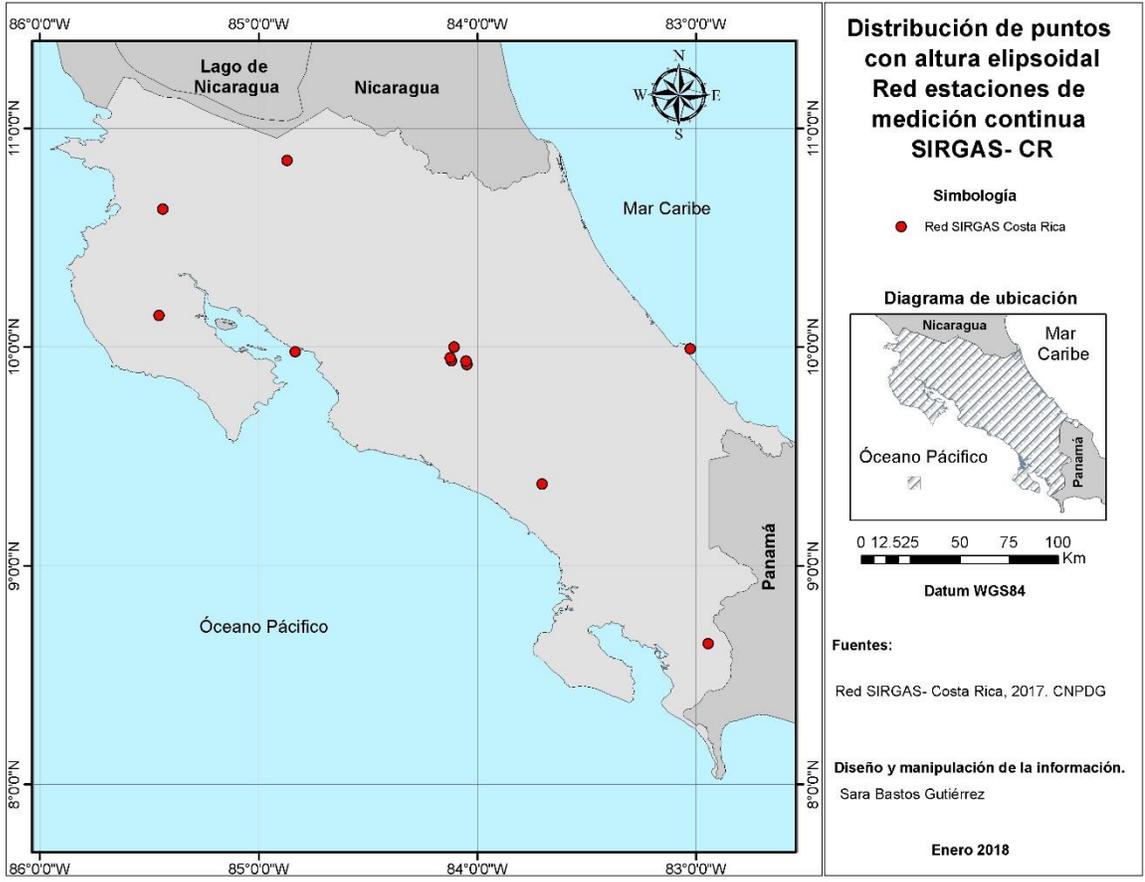
el encargado de procesar la red de Costa Rica adicionalmente con otras 107 estaciones ubicadas en el resto del continente.

SIRGAS en su definición es idéntica a la del Sistema Internacional de Referencia Terrestre (ITRS) y su realización es una densificación regional del Marco Internacional de Referencia Terrestre (SIRGAS, 2018).

Todas las semanas SIRGAS publica las coordenadas ajustadas al ITRF (referidas a la época de observación), están son de especial utilidad despues de terremotos fuertes que causan deformaciones en el marco de referencia y hacen inservibles las coordenadas determinadas previamente (SIRGAS, 2018).

Para el proyecto se tomó la información de 13 estaciones de medición continua tal como se ve en mapa 1, en Costa Rica son 14 las estaciones pertenecientes a la red SIRGAS, sin embargo, ISCO se ubica en la Isla del Coco y por su lejanía no fue utilizada en el proyecto.

SIRGAS publica las coordenadas geocéntricas (X, Y, Z) , de todas las estaciones continuas activas pertenecientes a su red, las mismas son procesadas semana a semana, y sus coordenadas pueden ser descargadas de su página web, en formato \* .CRD (archivo formato ASCII). Los datos utilizados en el proyecto corresponden al datum IGS14, época 2017,80 tal como se indica en la figura 8 donde en el recuadro rojo se indica la información de cada semana procesada.



**Mapa 1. Red de estaciones SIRGAS en Costa Rica**  
 Fuente: [www.cnpdg.una.ac.cr](http://www.cnpdg.una.ac.cr)

1	IBG SOLUTION ALIGNED TO IGS14 - FINAL COMBINATION - WEEK 1974 06-DEC-17 12:33				
2					
3	LOCAL GEODETIC DATUM: IGS14		EPOCH: 2017-11-08 12:00:00		
4					
5	NUM	STATION NAME	X (M)	Y (M)	Z (M) FLAG
6					
7	1	AACR 40612M001	644009.04035	-6251064.25420	1093780.93795 A
8	4	ABCC 41939M001	1739437.99635	-6117252.46679	515065.07599 A
9	5	ABMF 97103M001	2919785.76844	-5383744.97098	1774604.82582 A
10	6	ABPD 41941M001	1742983.24370	-6118331.50063	494730.72336 A
11	7	ABPW 41940M001	1753507.20716	-6113239.04077	518210.58878 A
12	8	ABRA 41575M001	2423793.36922	-5367435.02811	-2449718.33433 A
13	10	AGGO 41596M001	2765120.87054	-4449248.38585	-3626403.70975 A
14	15	ALAR 41653M001	5043729.69343	-3753105.61580	-1072966.83526 A
15	17	ALEC 42029M001	1233231.86663	-6255435.59478	-243534.48522 A
16	20	ALMA 48052M001	5103321.43566	-3677531.95830	-1051726.18278 A

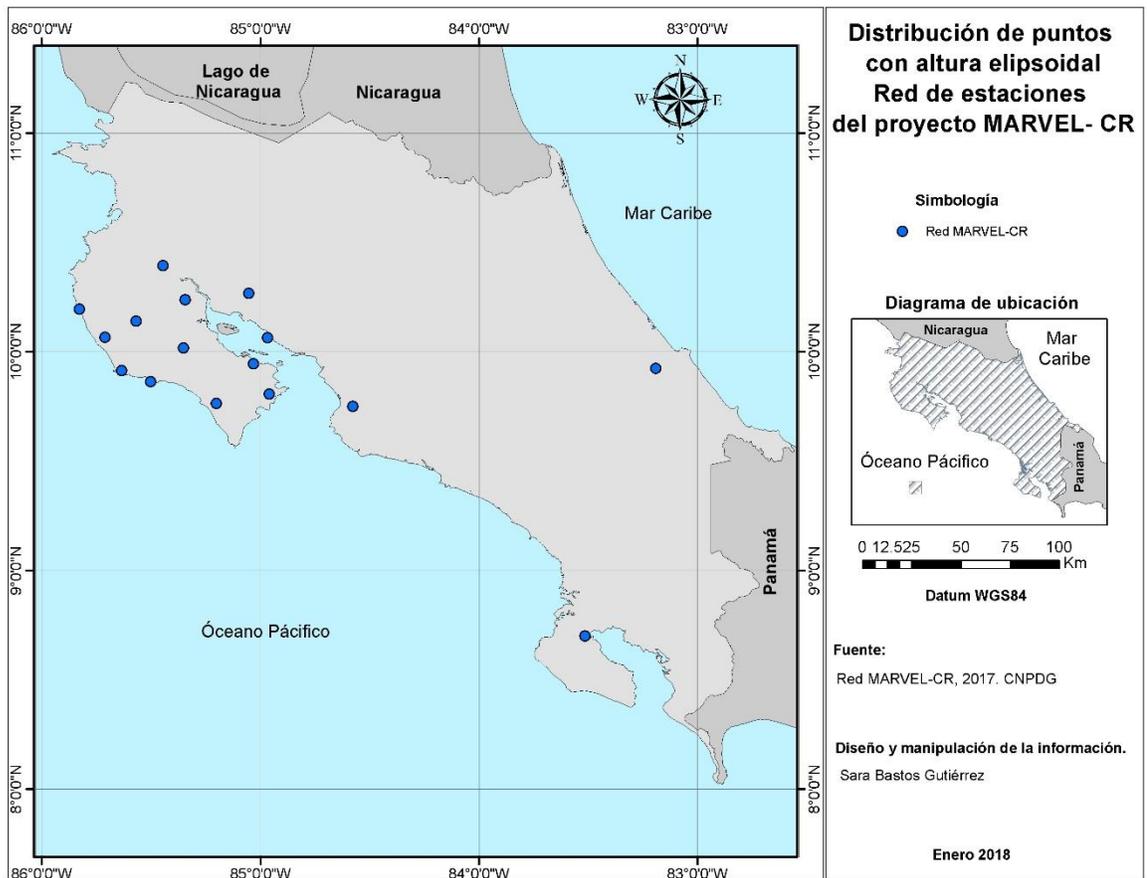
**Figura 7. Publicación de coordenadas geocéntricas para la red SIRGAS. Semana 1974.**  
 Fuente: [www.sirgas.org](http://www.sirgas.org)

Se partió de las coordenadas geocéntricas (X, Y, Z), el cual se transformó a coordenadas geodésicas ( $\varphi$ ,  $\lambda$  y h) y se tomó el elipsoide de referencia WGS84, por medio de una calculadora geodésica publicada en la red [www.tool-online.com/es/conversion-coordenadas.php](http://www.tool-online.com/es/conversion-coordenadas.php).

### Red MARVEL-CR.

Actualmente el CNPDG desarrolla una actividad de investigación, la misma tiene como uno de sus principales objetivos, la observación continua GNSS y procesamiento científico de un campo puntual nacional con vínculo a SIRGAS. El proyecto internamente es conocido como MARco de Referencia de VELocidades de Costa Rica (MARVEL-CR) (Moya et al, 2016).

La red geodésica que se procesa semanalmente (igual que la red SIRGAS) está integrada por 45 puntos, sin embargo, 14 de estos puntos son lo que corresponde a la red SIRGAS de Costa Rica y 16 puntos nuevos, que son puntos de estaciones de medición continua de diferentes instancias. Por tanto solo los últimos 16 puntos se tomaron en cuenta de este proyecto (ver mapa 2).



**Mapa 2. Red de estaciones del proyecto MARVEL-CR**  
Fuente: (Moya et al, 2016)

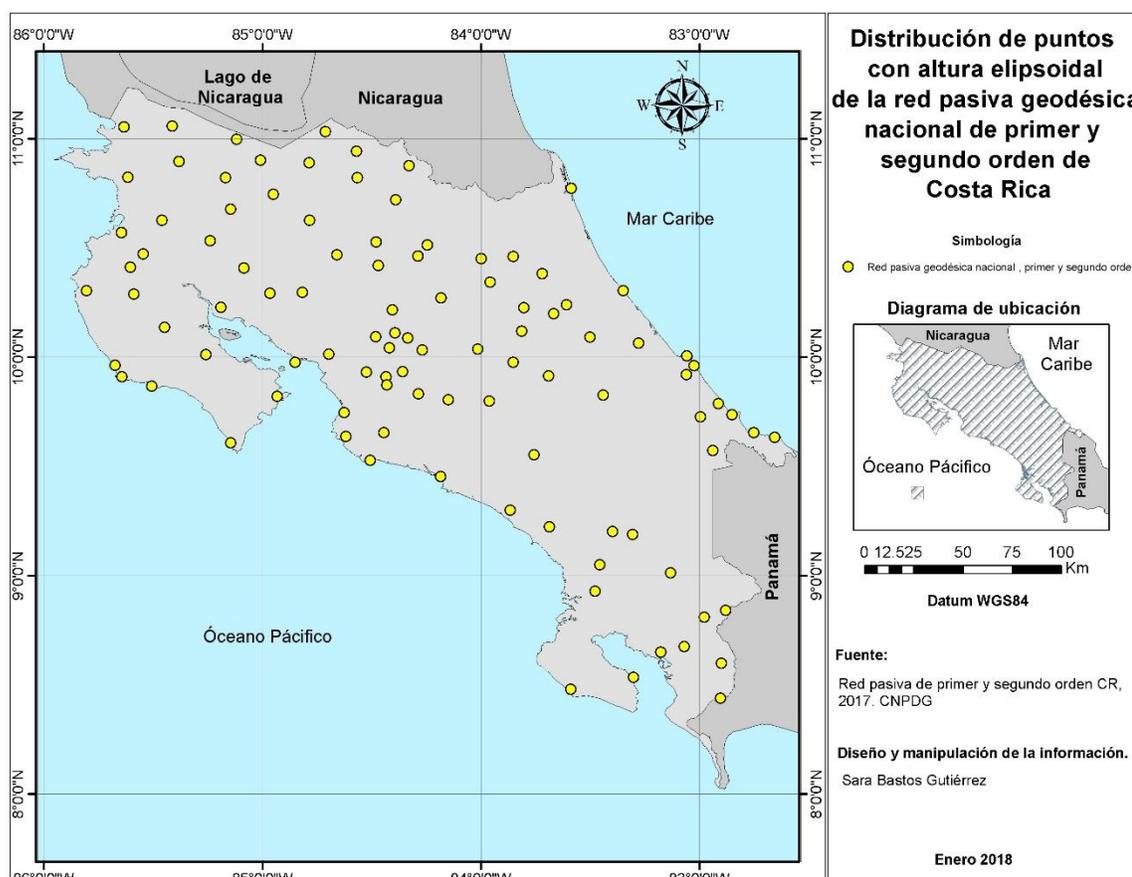
Las coordenadas fueron suministradas por el coordinador del proyecto, el Dr. Ing Jorge Moya Zamora, dadas en el datum IGS08, época 2016,5, en coordenadas geocéntricas y transformadas de la misma forma que la anterior por medio de una aplicación en la red.

Puntos de la red geodésica pasiva de primer orden y segundo orden de Costa Rica.

La red geodésica pasiva de primer y segundo orden de Costa Rica en el sistema de coordenadas CR05, fue publicado con fundamento en el decreto Ejecutivo N° 33797-MJ-MOPT del 30 de marzo del 2007. El sistema de coordenadas oficial de

Costa Rica está amarrado al Marco de Referencia Terrestre, realización 2000, reducido a la época 2005,83, que es la definición del sistema. Los 102 puntos, 34 corresponden a la red de primer orden (33 están materializados (varios ya están destruidos) y 1 corresponde al punto ETCG (parte de la red SIRGAS y red MARVEL-CR)) y 68 de la red de segundo orden, están distribuidos en todo el territorio y sus coordenadas geodésicas están referidas al elipsoide WGS84 (Geotecnologías, 2006 ).

En el mapa 3, los puntos de la red pasiva geodésica de primer orden y se adjunta en anexo 1 el listado de los puntos en latitud, longitud y altura elipsoídicas, además no se realizó ninguna transformación en las mismas.

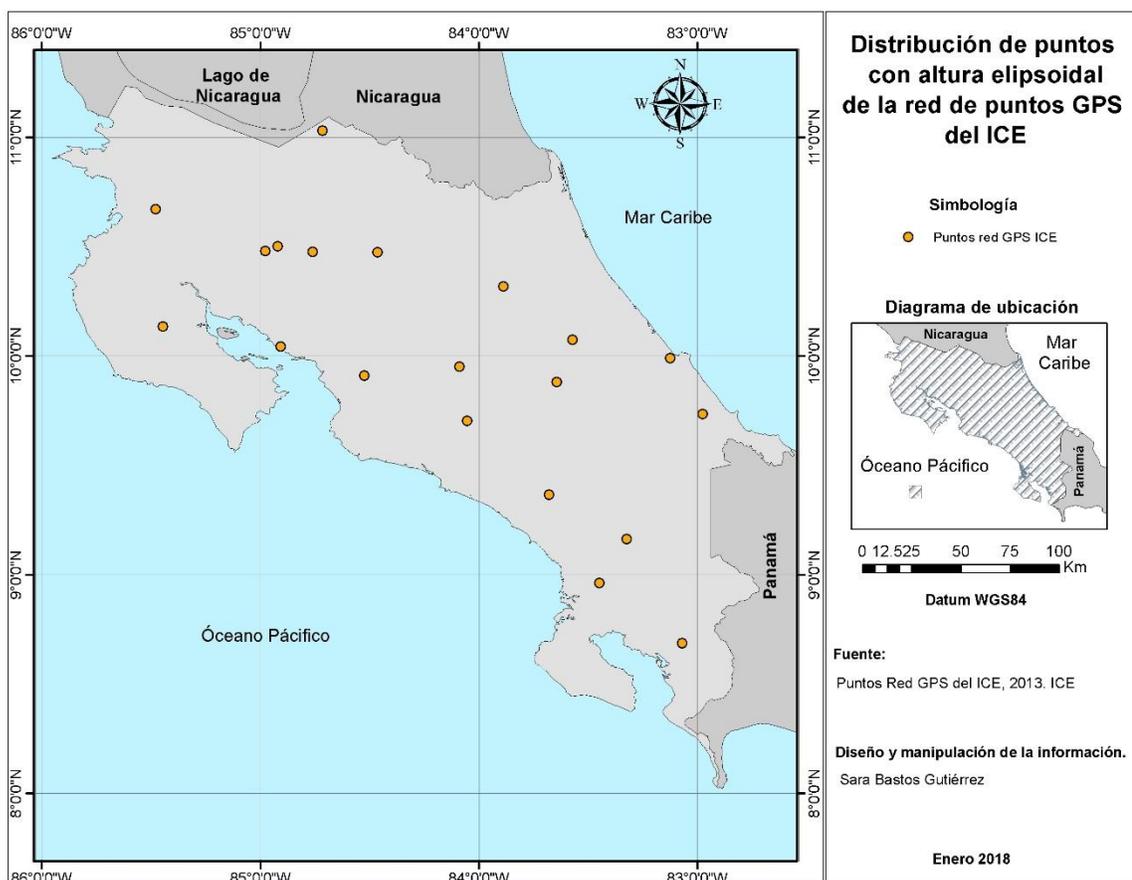


**Mapa 3. Red pasiva geodésica Nacional de primer y segundo orden de Costa Rica**  
Fuente: (IGN, 2007)

## Puntos GPS del ICE.

La información de la red GPS suministrada por el Instituto Costarricense de Electricidad (ICE) fue suministrada hace unos años para un proyecto a desarrollar en la UNA, en total son 20 puntos, datum CR05, época 2013,54.

En el siguiente mapa, se puede ver la distribución de la red y la tabla (anexo 2) con los datos tal y como se entregaron, que indica el nombre de algunos bancos de nivel, coordenadas cartesianas de los puntos (N, E), separación (valores de un ondulación calculados por modelo), los errores (se asume que son de algún procesamiento previo), y la elevación.



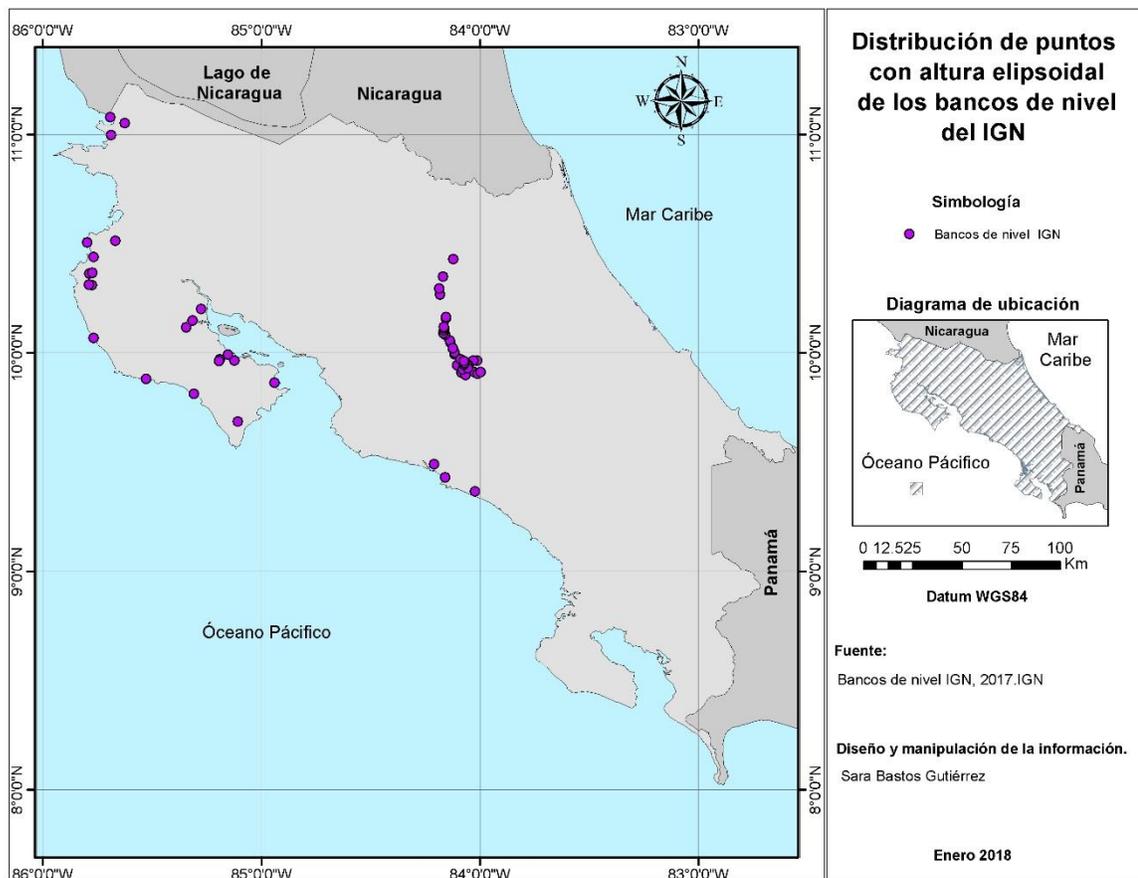
**Mapa 4. Red de puntos GPS del ICE.  
Fuente: ICE**

Para que los datos pudiesen ser utilizados, se hizo la transformación de coordenadas cartesianas a geodésicas mediante plantilla en Excel.

## Bancos de nivel del IGN medidos con GPS geodésico.

El IGN proporcionó información de 60 BN (mapa 5), medidos en colaboración con otras entidades, con fechas entre el 2007, 2009 y 2013.

El IGN suministró una tabla con el nombre del punto, coordenadas cartesianas, alturas elipsoidales, alturas ortométricas (correspondiente al valor oficial indicados en las fichas de campo), año de medición, tipo de punto, descripción, provincia, cantón, ubicación, quien hizo su descripción y la fuente. (Anexo 3)



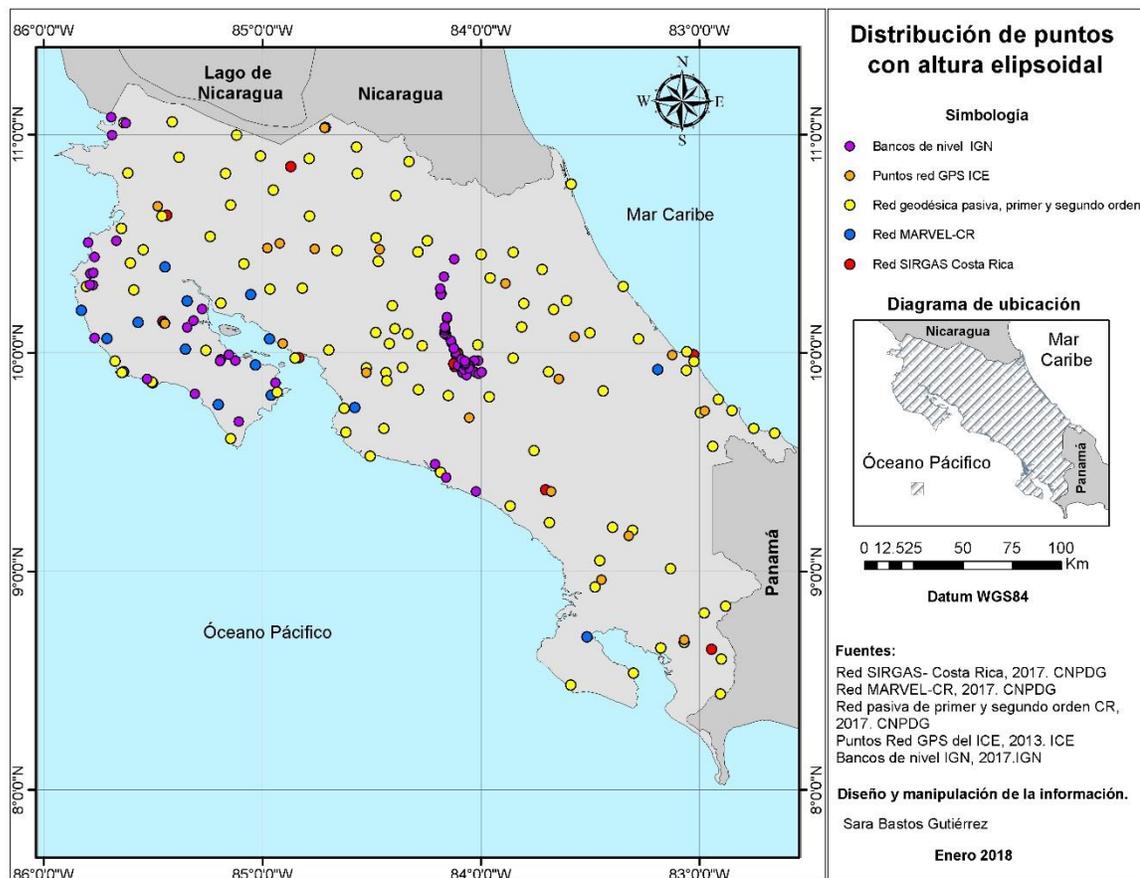
**Mapa 5. Distribución de los BN del IGN**  
**Fuente: IGN**

Se realizó, transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas geodésicas.

## Resultado de todas las fuentes de información

Se muestra el resultado de la unión de las 5 fuentes de información correspondiente a 209 puntos ( ver mapa 6), en la tabla de atributos (figura 14) donde se indicó, el nombre del punto, la latitud, longitud, altura elipsoídicas, una observación (fuente) y una categoría (figura 8).

Además, es importante aclarar que en este proyecto se obvió la época de medición utilizada en cada fuente (ya que provienen de diferentes épocas de observación), se trabajó con los valores calculados y transformados dependiendo del caso, ya que se quiso exponer el uso de las métodos de interpolación SIG, y no así los cambios geodésicos que puede mostrar cada punto.



**Mapa 6. Distribución de datos de las fuentes de información.  
Fuente: CNPDG, ICE e IGN**

FID	Shape *	Punto	Latitud	Longitud	Altura	Observacio	Categoría
128	Point ZM	798	10.267708	-84.183292	813.918	IGNCR Geodésico 2013	5
129	Point ZM	H0	10.001774	-84.116833	1182.057	IGNCR Geodésico 2013	5
130	Point ZM	H1	10.021154	-84.123752	1190.892	IGNCR Geodésico 2013	5
131	Point ZM	H7	10.084089	-84.159216	1520.321	IGNCR Geodésico 2013	5
132	Point ZM	H9	10.090989	-84.16692	1478.601	IGNCR Geodésico 2013	5
133	Point ZM	H10A	10.104381	-84.164447	1571.782	IGNCR Geodésico 2013	5
134	Point ZM	H12	10.112697	-84.163682	1740.062	IGNCR Geodésico 2013	5
135	Point ZM	H13	10.119344	-84.164429	1800.488	IGNCR Geodésico 2013	5
136	Point ZM	H18	10.163653	-84.155522	1891.78	IGNCR Geodésico 2013	5
137	Point ZM	H34	10.294767	-84.18668	724.522	IGNCR Geodésico 2013	5
181	Point ZM	BIJA	9.749975	-84.576868	555.63632	MARVEL-UNA IGb08 Época 2016,5	2
182	Point ZM	BON2	9.764529	-85.202508	28.377908	MARVEL-UNA IGb08 Época 2016,5	2
183	Point ZM	CABA	10.237872	-85.343534	26.899118	MARVEL-UNA IGb08 Época 2016,5	2

**Figura 8. Captura de pantalla de la tabla de atributos de las alturas elipsoidales usadas en el proyecto.**  
Fuente: Elaboración propia.

En resumen tal como se muestra en la tabla 2, las fuentes, el tipo de dato original, cantidad de puntos dados y los utilizados para el proyecto.

**Tabla 1. Resumen de fuentes de información para las alturas elipsoidales.**

Fuente	Tipo de dato	Cantidad	Usados
Red de estaciones de medición continua del Sistema de Referencia Geocéntricos para las Américas de Costa Rica	X, Y, Z	14	13
Red de estaciones del proyecto MARVEL-CR	X, Y,Z	45	16
Red pasiva geodésica nacional, primer y segundo orden	h	101	101

Red de puntos GPS del Instituto Costarricense de Electricidad	h	304	20
Bancos de nivel, parte de la red vertical oficial del Instituto Geográfico Nacional	h	118	60

Fuente: Elaboración propia

### 3.1.2 Ondulaciones del geoide provenientes del modelo EIGEN-6C4

El modelo geoidal global (N) denominado EIGEN-6C4 (European Improved Gravity Model of the Earth by New Techniques, versión 6C4) desarrollado por el GFZ (GeoForschungsZentrum) Potsdam y GRGS (Groupe Recherches Geodesic Spatiale) Toulouse (Förste, y otros, 2014). Este tipo de modelo genera una grilla (determinada por el usuario) de valores, en este proyecto fue calculado con una resolución de  $0,1^\circ \times 0,1^\circ$ , con 1656 puntos que cubre el país y parte de los océanos (figura 6), EIGEN-6C4 es denominado como un modelo de baja resolución ya que está hecho de forma global, donde lo ideal es que exista un modelo geoidal local. Costa Rica no cuenta con modelos geoidales a nivel nacional o de alta resolución, aun así existen varios intentos para su realización, como Heredia y San Mateo (Moya et al, 2004) y (Cordero, 2010); al igual existe un modelo generado por la National Geospatial-Intelligence Agency (NGA) de forma regional como el Carib97, sin embargo no cubre el país en su totalidad.

Las ondulaciones del geoide proveniente del modelo EIGEN-6c4, fue descargado de la página <http://icgem.gfz-potsdam.de/calc>, en el módulo de Calculation service, se indicó el modelo (EIGEN-6c4), así como la selección funcional (geoide), se delimita la zona donde se desea calcular los valores geoidales (Latitud (11.5, 8) longitud (-86.5,-82) ), el sistema de referencia (WGS84) y se indica un valor de grilla

(0,1°x 0,1°), que corresponde a valores geoidales aproximadamente a cada 11 km.

Tal como se indica en la figura 9, se visualiza los valores a ingresar para delimitar el área de interés:

**Calculation of Gravity Field Functionals on Ellipsoidal Grids**

**Model selection**

Longitude Model  
Model from Series  
Topography related Model  
Celestial Object Model  
Topography

EIGEN-2  
EIGEN-51C  
EIGEN-5C  
EIGEN-5S  
EIGEN-6C  
EIGEN-6C2  
EIGEN-6C3stat  
**EIGEN-6C4**  
EIGEN-6S  
EIGEN-6S2  
EIGEN-6S4 (v2)  
EIGEN-CG01C  
EIGEN-CHAMP03S  
EIGEN-CHAMP03Sp  
EIGEN-CHAMP05S  
EIGEN-GL04C

**Functional selection**

height\_anomaly  
height\_anomaly\_ell  
**geoid**  
gravity\_disturbance  
gravity\_disturbance\_geoid  
gravity\_disturbance\_sa  
gravity\_anomaly  
gravity\_anomaly\_d  
gravity\_anomaly\_sa  
gravity\_anomaly\_bg

The Geoid is one particular equipotential surface of the gravity potential of the Earth. Among all equipotential surfaces, the geoid is those which is equal to the undisturbed sea surface and its continuation below the continents. Here it will be approximated by the height anomaly plus a topography dependent correction term (eqs. 71 and 117 of STR09/02).

**Truncation**

**Grid selection**

Longitude: -86 to -82  
Latitude: 8  
Grid Step [°]: 1.0  
Height over Ellipsoid [m]: 0

**Reference System:** WGS84  
Radius: 6378137.0  
Flat: 298.257223563  
Gm: 3.986004418e+14  
Omega: 7.292115e-5

**Tide System:** use unmodified model  Zero Degree Term

**Filter**

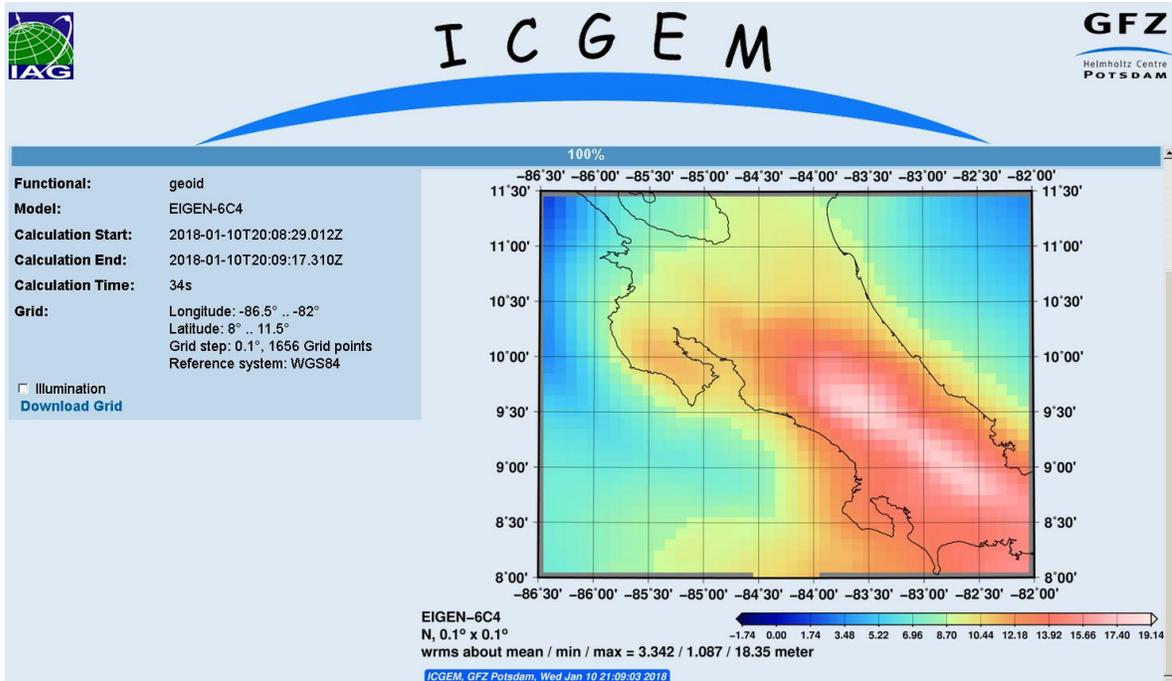
None  
 Half response  
 Half transfer  
 6 Sigma

Definitions of the Filterlength  $\Phi$

Impulse Response  $R(x)$   
 $\Phi$ (halfresponse)

**Figura 9. Página de ICGEM. Descarga de valores geoidales para el país.**  
Fuente: <http://icgem.gfz-potsdam.de/calc>

A la hora de generarse los valores geoidales se despliega un mapa tomando en cuenta los valores calculados , se generaron un total de 1656 puntos tomando en cuenta toda la superficie del país y parte de los dos océanos (figura 10), para los valores de la grilla, se descargó un archivo \*.txt .



**Figura 10. Ondulaciones del geoido, modelo EIGEN-6c4.**  
 Fuente: <http://icgem.gfz-potsdam.de/calc>

En la figura 11, el formato de salida del cálculo realizado por la página de ICGEM,

```

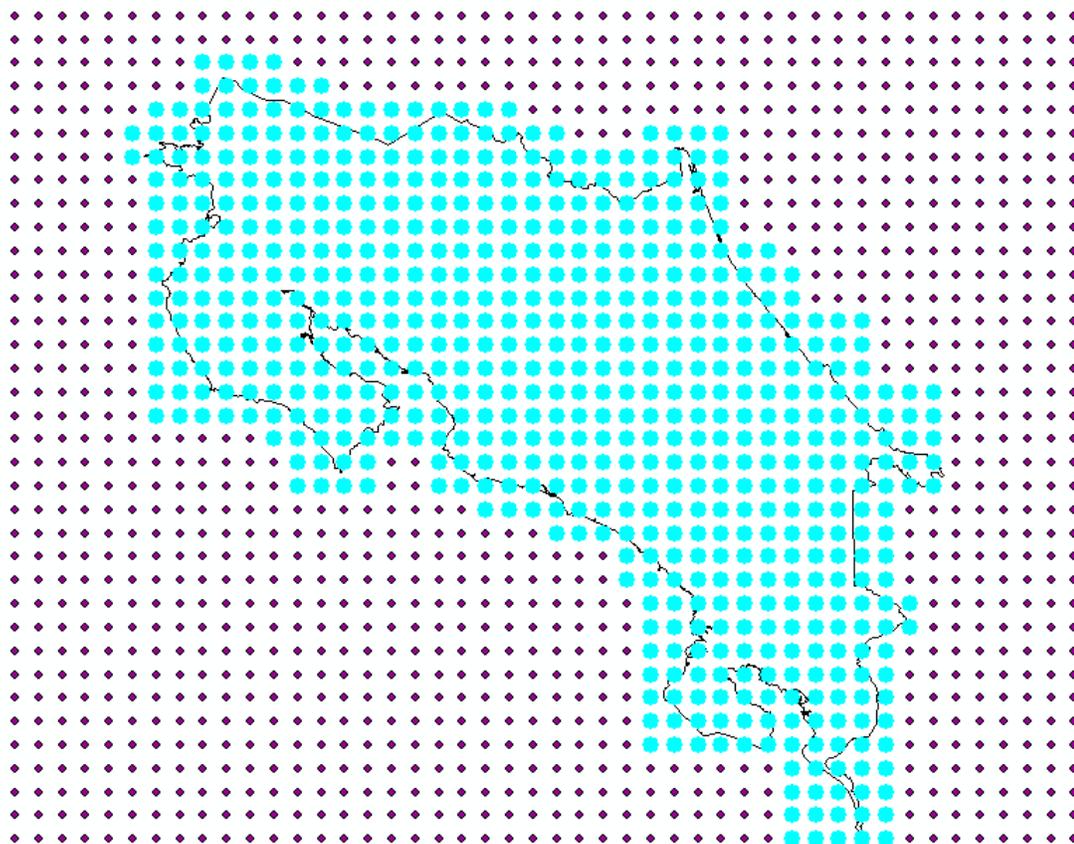
generating_institute      gfz-potsdam
generating_date           2017/12/06
product_type              gravity_field
  body                    earth
  modelname               EIGEN-6C4
max_used_degree           2190
  tide_system             tide_free
  functional               geoid
zero_degree_term          included
  unit                    meter
crust_density             2670.0 kg/m**3
refsysname                WGS84
  ghrefpot                3.98600441800E+14 m**3/s**2
  radiusrefpot            6378137.000 m
  flatrefpot              3.352810664747480E-03 (1/298.25722356300)
  omegarefpot             7.29211500000E-05 1/s
normal_potential          6.263685171456948E+07 m**2/s**2
  long_lat_unit           degree
  latlimit_north          11.500000000000
  latlimit_south          8.000000000000
  longlimit_west          273.500000000000
  longlimit_east          278.000000000000
  gridstep                0.500000000000
  latitude_parallels      8
  longitude_parallels     10
number_of_gridpoints      80
  gapvalue                999.0000
  weighted_mean           9.1864094E+00 meter
  maxvalue                1.8349989E+01 meter
  minvalue                1.0867850E+00 meter
  signal_wrms             3.5186016E+00 meter
  grid_format             long_lat_value

  longitude               latitude      geoid
  [deg.]                  [deg.]      [meter]
end_of_head -----
273.5000                  11.5000      1.086784955715
274.0000                  11.5000      5.507315168381
274.5000                  11.5000      7.063064742524
275.0000                  11.5000      8.469964827731
  
```

**Figura 11. Formato de salida del modelo EIGEN-6c4**  
 Fuente: <http://icgem.gfz-potsdam.de/calc>

En el proyecto se generó una tabla Excel<sup>®</sup> eliminando los encabezados y el único dato que se debió cambiar debido al formato original, fue la longitud, como se observa los valores están dados a partir del meridiano de Greenwich con 0 y sin tomar valores negativos, por lo que solo se le restó 360° a cada valor, lo cual permite ser utilizado para incluirlo en formato shape en el ArcGIS<sup>®</sup>.

Además, la grilla generada en el SIG abarcó superficie que no fue necesaria modelar, por lo que se seleccionaron 631 puntos, que cubriesen el país y zonas alrededor. En la siguiente figura se puede ver los puntos seleccionados y utilizados en color cyan.



**Figura 12. Puntos seleccionados del modelo**  
**Fuente: Elaboración propia**

### 3.1.3 Red de bancos de nivel del IGN de Costa Rica.

Esta información fue proporcionada directamente por el IGN, y es lo que se asume como la referencia vertical, el mapa indicado fue dibujado a partir de la información suministrada por el IGN y la ubicación de todos los bancos de nivel “existentes” en el país.

Esta información es la que permitió la comparación de la diferencia de las superficies generadas, alturas elipsóidicas y modelo geoidal con las alturas ortométricas oficiales del país.

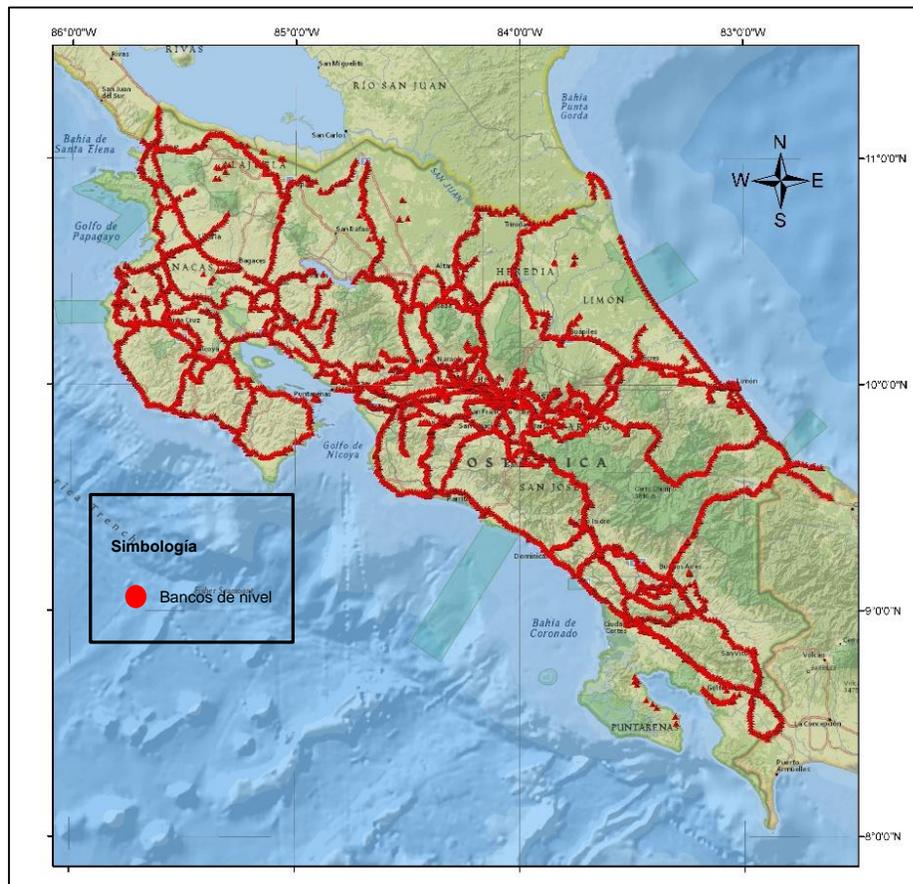


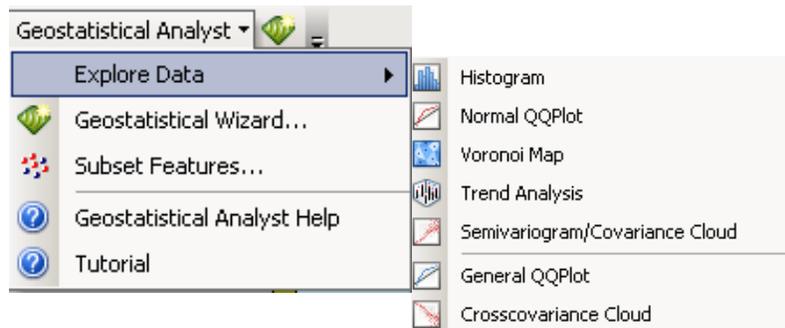
Figura 13. Red vertical oficial de Costa Rica.  
Fuente: CNPDG e IGN

### 3.2 Análisis exploratorio de los datos

El análisis exploratorio de los datos pretende estudiar el nivel de normalidad de los datos, conocer la incidencia de los valores extremos sobre la estadística y verificar la presencia de tendencias polinómicas en el conjunto de los datos (Quesada & Marsik, 2012) . Según (Cañada, 2005), el análisis exploratorio tiene como objetivo:

- Examinar la distribución de los datos.
- Detectar valores extremos (outliers) locales y globales.
- Buscar tendencias globales.
- Examinar la autocorrelación espacial y la variación direccional de los datos.
- Entender la covariación entre múltiples variables.
- Realizar transformaciones de los datos si son requeridas.

Los SIG poseen herramientas estadísticas para efectuar dichos análisis. En el caso del ArcGIS® versión 10.3 y desde la licencia de Geostatistical Analysis, se realizó la exploración de los datos desde el “explore data”, donde se puede escoger varias funciones para realizar el análisis de los datos. Para el proyecto se utilizaron el histograma, el gráfico de probabilidad normal Q-Q y el gráfico de semivarianza/covarianza cruzada. Como se puede ver en la 14, el interfaz que del geostatistical analyst, donde muestra las opciones disponibles:



**Figura 14. Interfaz para selección de la exploración de los datos.**  
**Fuente: ArcGIS® 10.3**

El análisis exploratorio de los datos se realizó para las dos variables disponibles,

tanto para los datos de las alturas elipsoidales como para las ondulaciones del geoide. Para cada una de las funciones desplegadas, fue necesario elegir la capa y el campo dentro de la tabla para analizar.

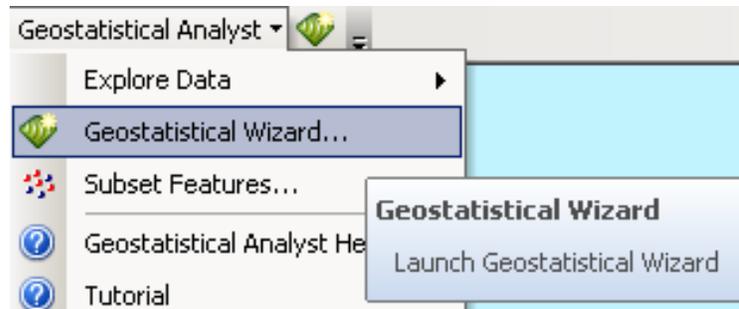
Para este apartado, se tomó en cuenta que los datos suministrados no pueden ser eliminados o transformados, ya que las alturas elipsoidales son puntos medidos y las ondulaciones del geoide son datos obtenidos por modelo. De igual forma se realizó un análisis de los posibles outliers y el comportamiento estadístico en la información de partida.

### **3.3 Análisis estructural de los datos.**

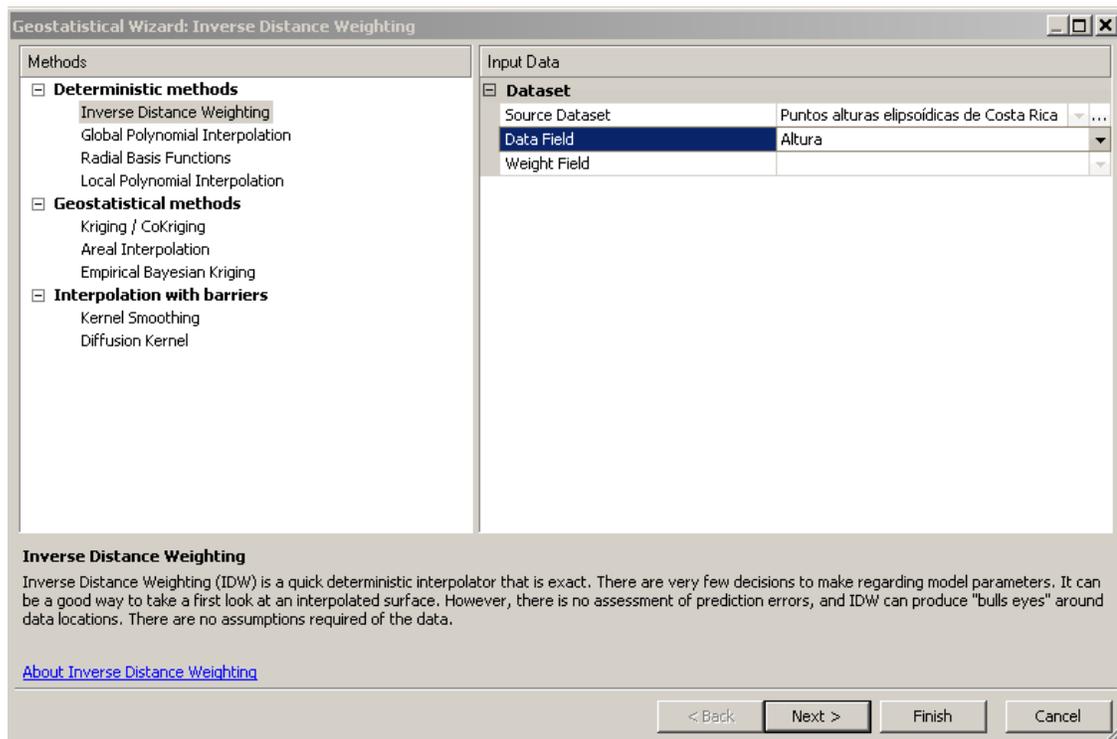
Se efectuó posteriormente, el análisis estructural, empleando dos métodos determinísticos, el IDW y Spline, y el Topo to Raster. Antes de determinar los métodos de interpolación a utilizar, se hizo el análisis de tres métodos más incluyendo el TIN, Kriging ordinario y el Empirical Bayesian Kriging pero, no representaban de la mejor forma las superficies a modelar.

El Topo to Raster no está incluido en la herramienta geostatistical analyst, lo cual no permitió realizar un análisis estructural del interpolador. Se utilizaron estos tres interpoladores para determinar cuál podría representar de mejor manera la superficie nivelada y cuál mantenía mayor concordancia con las alturas oficiales de Costa Rica.

Para los interpoladores IDW y Spline fue posible generar los gráficos de valores medidos de acuerdo con los predichos al igual que los errores de la predicción. En la figura 15, se visualiza la barra de herramientas de geostatistical analyst, en geostatistical wizard, desde ahí se despliega las opciones del layer y del campo a modelar para la tabla de atributos, se realizó el mismo procedimiento tanto para las alturas elipsóidicas como para las ondulaciones del geoide. En la figura 16 se muestra el método para el cálculo de la superficie para el variable h

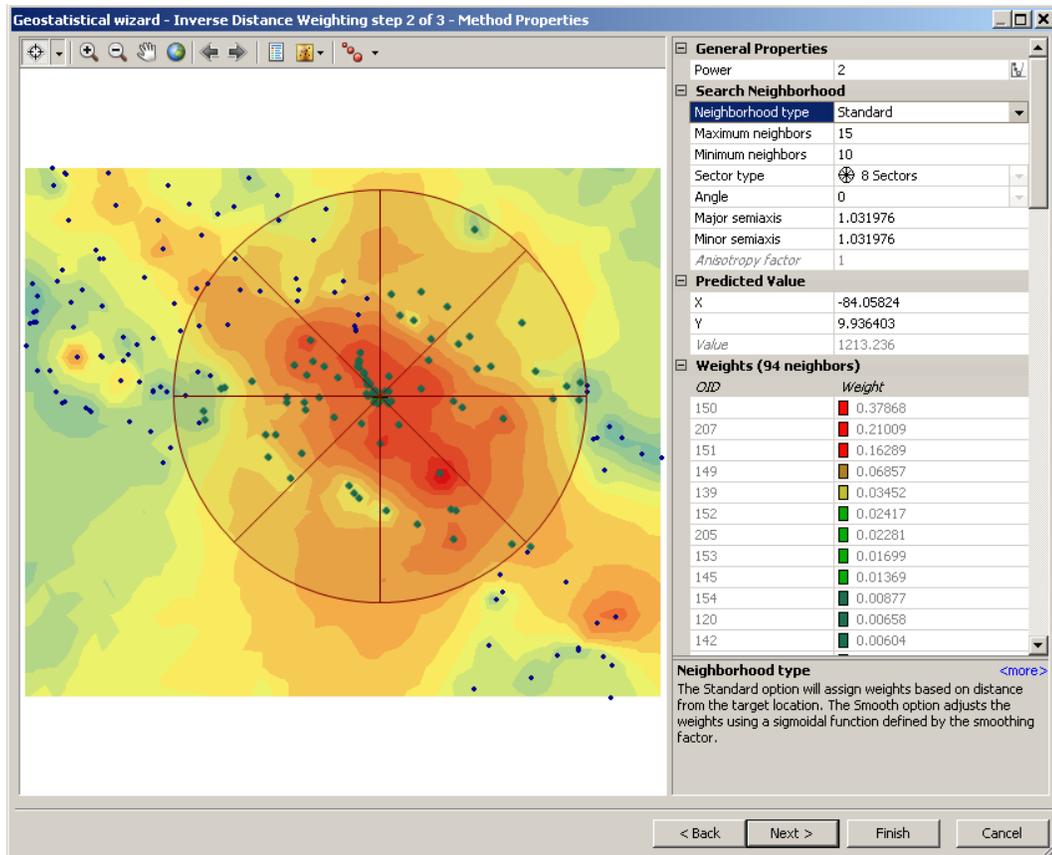


**Figura 15. Interfaz de geostatistical analyst para el análisis estructural de los interpoladores.**  
**Fuente: ArcGIS® 10.3**



**Figura 16. Interfaz para generación de la superficie interpolada, para las alturas elipsoidales.**  
**Fuente: ArcGIS® 10.3**

Asimismo, se muestran las propiedades generales para el interpolador, permitiendo modificar algunas de los variables, para este caso, se realizó el cambio en tipo de sector, ya que incluye valores en todas las direcciones y que permite aplicar el número máximo y mínimo de vecinos en cada sector. Tal como se muestra en la figura 17.



**Figura 17. Interfaz de geostatistical wizard, previa al cálculo de superficie interpolada para las alturas elipsóidicas.  
Fuente: ArcGIS® 10.3**

Y por último, en la figura 18, se muestra la interfaz que permite ver los gráficos de los errores y las predicciones para cada interpolador, como resultado de la última ventada en la interfaz de geostatistical, es la creación de la superficie de predicción para cada interpolador y de cada variable, sus resultados se muestran en el capítulo VI, en el apartado de los resultados del análisis estructural y estimación de las superficies.

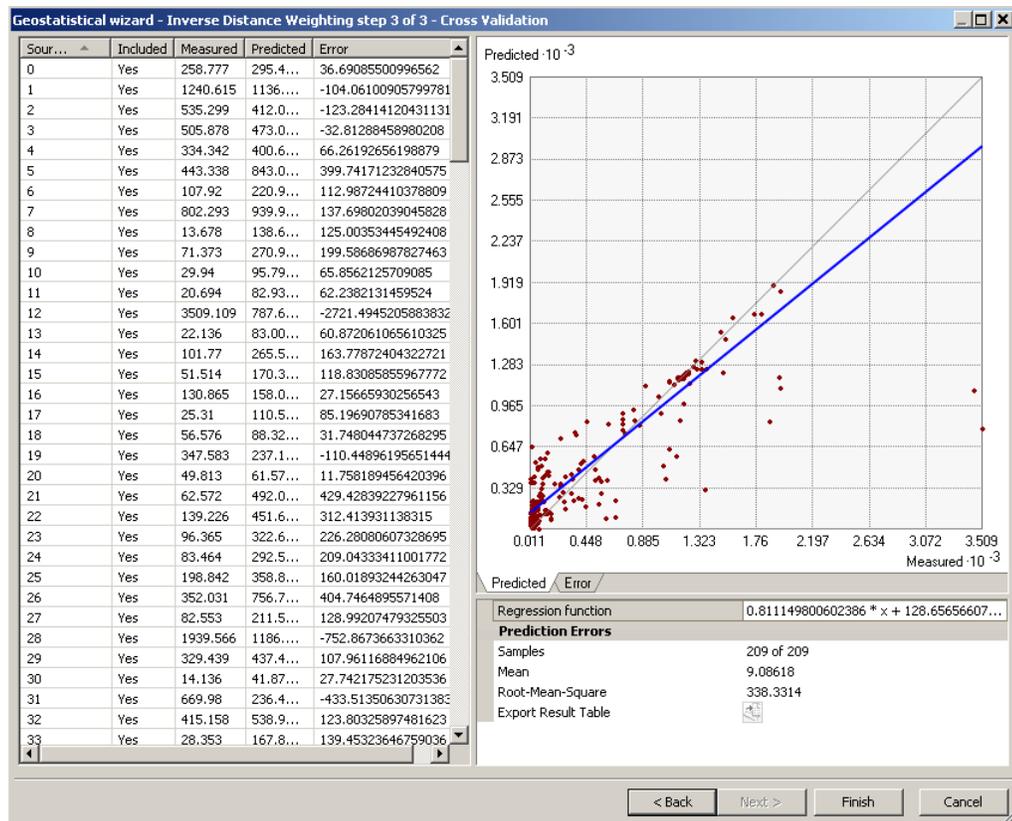


Figura 18. Interfaz que muestra el resultado para las alturas elipsoidales.  
Fuente: ArcGIS® 10.3

### 3.4 Modelamiento de las superficies de predicción.

Al realizar el análisis estructural permite crear de una vez las superficies de predicción para cada variable, llamadas superficie topográfica o bien la superficie de las alturas niveladas calculadas para Costa Rica.

Se generaron 6 superficies con 3 diferentes métodos de interpolación: IDW, Spline y Topo to Raster para las variables de alturas elipsóidicas y ondulaciones del geoides, es decir un total de 3 superficies niveladas para cada variable.

### **3.4.1 Interpolador IDW**

La primera superficie aplicando el interpolador IDW, fue el de las alturas elipsoídicas, se calculó con el módulo de geostatistical analyst, desde el método determinístico y con la opción inverse distance weighting. Es importante tener en cuenta que, el interpolador crea una superficie y la limita a partir de los datos de entrada, lo que se hace necesario extenderla a todo el contorno del país, para evitar espacios en blanco.

La superficie obtenida, fue convertida a formato raster, se indicó un tamaño en el pixel de salida de  $0.001^\circ$ , aproximadamente equivale a 100 m x 100 m y se recortó con un extract by mask el contorno de Costa Rica. La superficie de predicción de las ondulaciones del geoide, se calculó con la misma metodología anteriormente descrita.

### **3.4.2 Interpolador Spline**

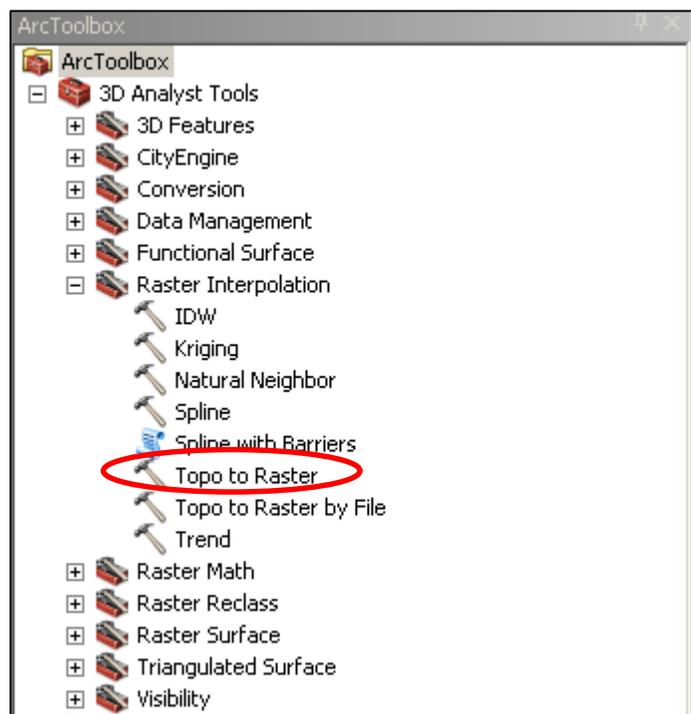
Las superficies calculadas a partir del interpolador spline, corresponde a una función de “base radial” y es una técnica de interpolación exacta. En el geospatial analyst trabaja 5 funciones de base simple: spline, spline con tensión, spline completamente regularizada, función multicuadrática y spline multicuadrática inversa. Cada función de base tiene diferente forma y da como resultado una superficie de interpolación distinta, sin embargo, conceptualmente son similares (Cañada, 2005).

El procedimiento para definir la superficie para las alturas elipsoídicas con el modelo de predicción Spline, fue elaborado desde el geostatistical analyst. En los métodos determinísticos, denominados como radial basis function, para la función de kernell se utilizó completely regularized spline (esta opción permite optimizar calculando el error medio cuadrático de la predicción en comparación con los valores del punto de datos mediante una validación cruzada simple) (Smith et al, 2017). Al igual que la superficie IDW, posteriormente se transformó a formato raster, con valores de pixel de 100 m x 100 m, y se recortó con extract by mask el contorno del país. El spline a diferencia del IDW predice valores encima o debajo del valor muestral. Para

la variable de ondulaciones del geoide, se utilizó la misma metodología antes descrita.

### 3.4.3 Interpolador Topo to raster

Para los mapas de predicción de las variables del proyecto con el interpolador Topo to Raster, se utilizó la licencia de 3D analysis, desde raster interpolation, y la opción de Topo to raster ( ver figura 19). Se identificaron los datos de entrada de cada variable (altura para la variable h y geoide para la variable N) y el contorno de Costa Rica que delimita la zona de trabajo. A diferencia del interpolador IDW y Spline, el interpolador Topo to raster permite poner restricciones, con el fin de que represente de la mejor forma las crestas y en el caso que existan arroyos. Asimismo, se indica de una vez la restricción del contorno, lo que permite delimitar de una vez la zona de trabajo y además genera el mapa en formato raster.



**Figura 19. Interfaz para el interpolador Topo to raster.**  
Fuente: Fuente: ArcGIS® 10.3

### 3.5 Estimación de las alturas niveladas y comparación de superficies.

A continuación se describe el procedimiento para la estimación directa de la

superficie topográfica (H) de Costa Rica, a partir de las superficies de predicción anteriormente creadas y su comparación con la información de los bancos de nivel del IGN.

### **3.5.1 Estimación de las alturas niveladas (H)**

En el capítulo II, para estimar la superficie topográfica se deduce de la ecuación definida para la ondulación del geode, la cual por el despeje de la misma se obtiene H, a partir de una diferencia directa entre las superficies. En donde se tiene las superficies de predicción para h y N, el cálculo de H está dado por:

$$H = h - N$$

Se calculó las superficies de cada interpolador desde la herramienta de raster calculator, determinándose así 3 superficies de alturas niveladas, uno por cada interpolador.

### **3.5.2 Comparación y diferencias entre superficies.**

Para comparar y calcular la diferencia entre las alturas oficiales contra las superficies calculadas, se realizó un cambio de los puntos de los bancos de nivel oficiales del IGN (originalmente está como un shape de puntos) a formato raster mediante la herramienta point to raster, con valores de pixel a cada 100 m. Lo anterior, con el fin de tener coincidencia en el tamaño del pixel respecto a las superficies de cada interpolador. No se creó una superficie ya que los puntos son circuitos y tienen muchos vacíos de información y causa confusión para presentar las diferencias.

De la misma forma con el raster calculator, se calcularon las diferencias de cada interpolador restando el mapa de superficie por cada interpolador (IDW, Spline, Topo to Raster) menos el mapa raster de los bancos de nivel IGN. El producto son los mapas de diferencias por cada interpolador.

Sin embargo, por el tamaño del pixel y al abarcar todo el territorio nacional las diferencias no son notorias; por lo que se decidió hacer la representación de sus

valores numéricos en tablas, donde con un “reclassify” se clasificó las diferencias por rangos (9 clases). La clasificación siguió los siguientes criterios, tomando los valores de mayores a menores diferencias, se indicó: la cantidad de datos por rango, el rango, el promedio, las desviaciones estándar de la población y las desviaciones estándar del promedio para cada interpolador (ver figura 20). De esta forma se determinó cuál de los interpoladores presenta mayores diferencias con las alturas oficiales del IGN, en el capítulo IV se hará una descripción de estos resultados.

Rowid	VALUE	COUNT	RANGO	PROMEDIO	DESVIACIÓN	DESVIACIÓN_PROM
0	1	40	-1800--1000	-1275.187	198.552	31.3938
1	2	84	-1000--500	-666.2577	128.056	13.972
2	3	267	-500--100	-262.152	114.574	7.0118
3	4	81	-100--50	-71.3792	14.449	1.605
4	5	675	-50-50	10.0593	25.397	0.9775
5	6	322	50-100	76.4267	14.017	0.7811
6	7	770	100-500	190.1525	87.877	31.1668
7	8	25	500-1000	580.893	104.7159	20.9431
8	9	3	1000-1400	1282.345	96.45	55.6854

**Figura 20. Ejemplo de tabla atributos para las diferencias con el interpolador IDW.**  
**Fuente: Elaboración propia.**

## CAPÍTULO IV

### 4. RESULTADOS

En este capítulo se presenta los resultados y el análisis respectivo según lo propuesto para este proyecto de investigación.

#### 4.1 Resultado del análisis exploratorio de los datos.

##### 4.1.1 Análisis estadístico para las alturas elipsoídicas.

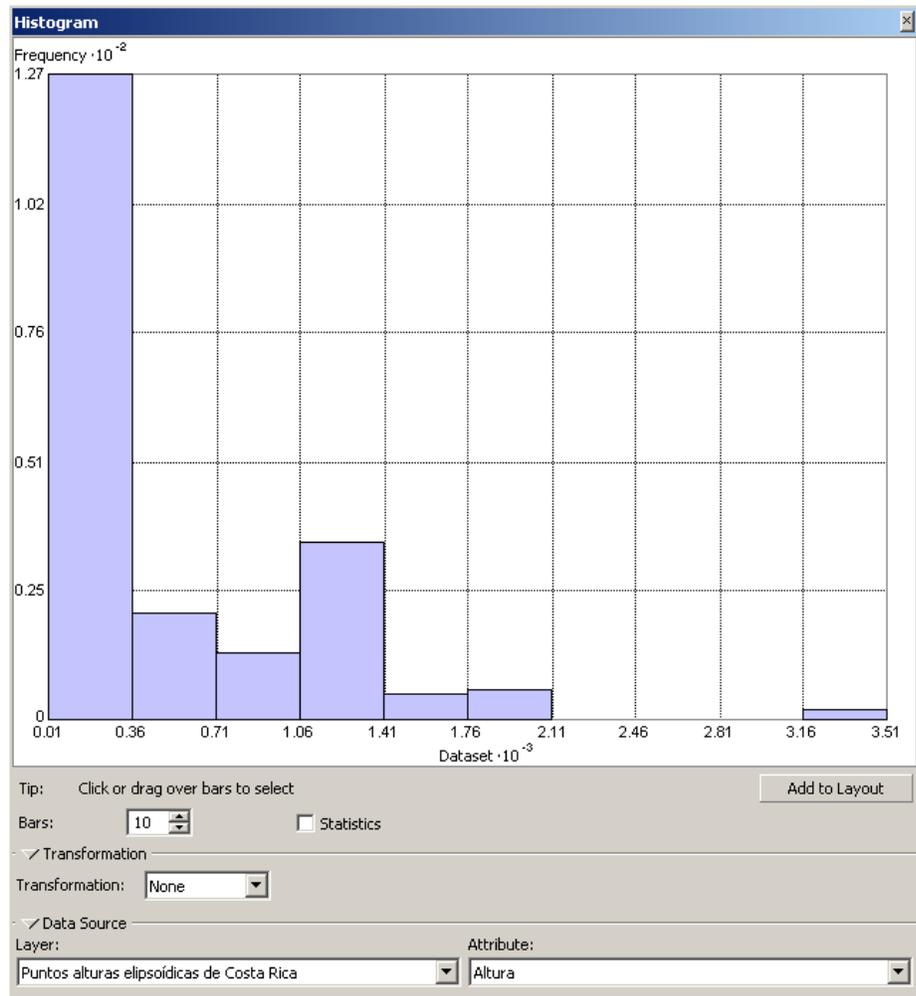
Tal como se mencionó en el capítulo III, se construyó el histograma (ver gráfico 1) para el conjunto de datos de las alturas elipsoídicas como se puede visualizar en la figura 21. Un cuadro resumen de estadísticos que describen la centralidad de los datos, la dispersión y la forma.



<b>Count</b>	<b>: 209</b>	<b>Skewness</b>	<b>: 1.7526</b>
<b>Min</b>	<b>: 10.587</b>	<b>Kurtosis</b>	<b>: 7.1693</b>
<b>Max</b>	<b>: 3509.1</b>	<b>1-st Quartile</b>	<b>: 39.634</b>
<b>Mean</b>	<b>: 479.48</b>	<b>Median</b>	<b>: 139.23</b>
<b>Std. Dev.</b>	<b>: 611.43</b>	<b>3-rd Quartile</b>	<b>: 923.9</b>

**Figura 21. Resumen estadístico para las alturas elipsoídicas.  
Fuente: ArcGIS® 10.3**

Como medida de centralidad, se puede apreciar la frecuencia de los datos en la figura 21. Se indica la media de los datos (479,48 m) y la mediana (139,23 m). También se puede visualizar en el histograma, que la mayoría de los datos se encuentran del 50 % por arriba de la mediana.



**Gráfico 1. Histograma de frecuencia de los datos para las alturas elipsoídicas h**  
**Fuente: ArcGIS® 10.3**

Como una de las medidas de dispersión de la información, se puede observar que el valor de la desviación estándar es muy alta, por lo que los datos están muy alejados del valor medio.

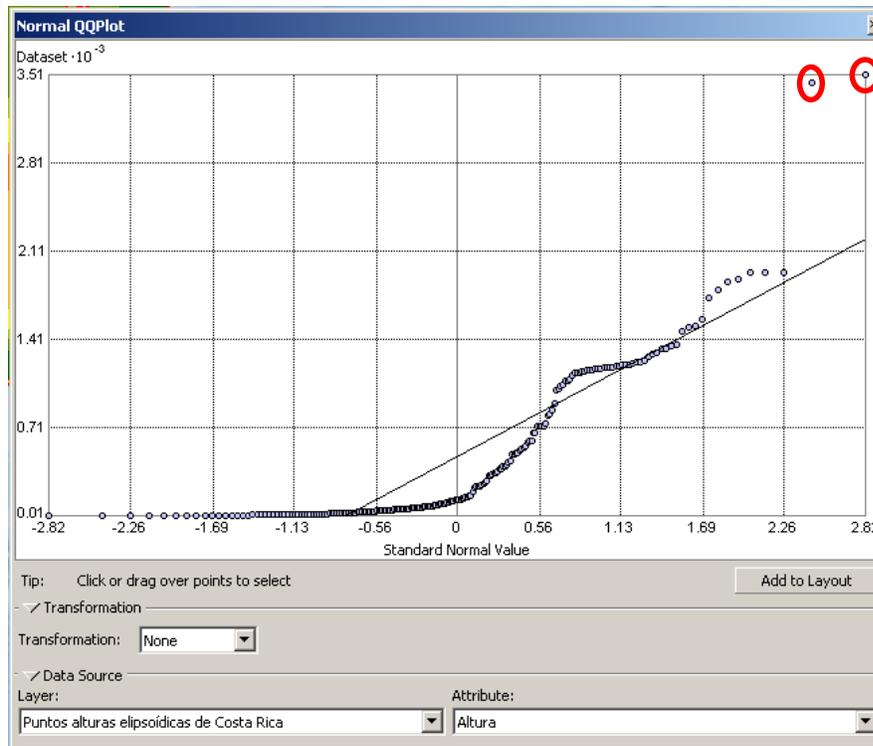
Como medidas de forma, en el caso del coeficiente de asimetría o sesgo (skewness), donde se estudia el grado de concentración de la masa de los valores a un lado u otro de la media (Cañada, 2005). Nos indica que el valor del skewness es de 1.7526 es inferior a la media (479.48) entonces, la distribución está sesgada positivamente, o que tiene una simetría positiva y este caso aparece una cola de valores grandes a la derecha, estas se refieren a los valores con alturas entre los 3160 m y los 3510 m, que corresponden a dos puntos uno ubicado en el volcán Irazú y otro en el Cerro

de la Muerte Este último pertenece a un punto de la red de primer orden llamado BUVIS, a diferencia de los datos de la izquierda, e indica que la mayoría de los datos alrededor de 127, están entre los 10 m a 360 m de alturas elipsóidicas y son los que se repiten con más frecuencia.

En el caso de la curtosis, que mide el grado de concentración de los valores en una parte de la distribución de los datos (apuntamiento de la distribución) (Cañada, 2005) mantiene un valor superior a 3, lo que significa que tiene una proporción amplia de todos los valores de la distribución.

Para el gráfico de probabilidad normal Q-Q (ver gráfico 2), estos gráficos representan los cuantiles de una distribución. Los valores correspondientes a una distribución normal vienen representados por la recta y los puntos son las puntuaciones reales de los individuos, valores observados frente a los esperados que serían los de la recta. (Cañada, 2005).

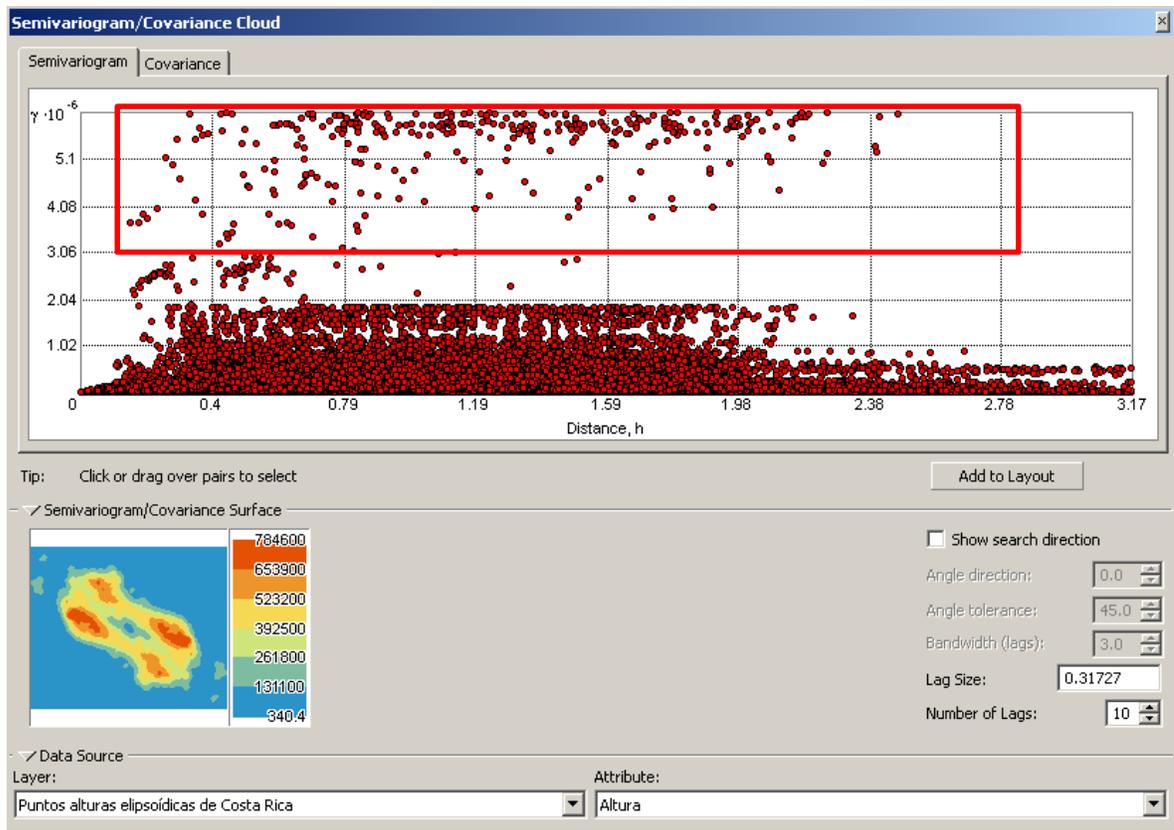
Por lo anterior, muchos de los datos están alejados de la recta, lo que indica que los valores observados se alejan del ajuste a la ley normal o gaussiana, e indica que los valores no corresponden a una distribución normal. Si se puede ver que existen dos puntos con valores extremos (outliers) en círculos rojos, tienen que ver con lo mencionado anteriormente sobre la ubicación de los dos puntos de Irazú y el Cerro de la Muerte.



**Gráfico 2. Gráfico de probabilidad normal Q-Q, para las alturas elipsoidicas.**  
**Fuente: ArcGIS® 10.3**

Para la nube de semivariograma/covarianza, principalmente se quiso explorar y cuantificar la dependencia espacial que tienen las variables (auto correlación espacial). La autocorrelación espacial asumen que las cosas que están más cerca son más parecidas a las cosas que están más lejos (Cañada, 2005). Al igual que se asume su principio de estacionariedad, que consiste en que si dos lugares están a una distancia y dirección similar tendrán similares diferencias al cuadrado entre sus valores (estacionariedad de segundo orden) (Cañada, 2005).

A partir del ArcGIS® 10.3 y con la herramienta de Geoestadistical Analysis, con la función de semivariogram/ covarinca colud, se construyó el gráfico para su análisis, tal como se muestra en el gráfico 3.

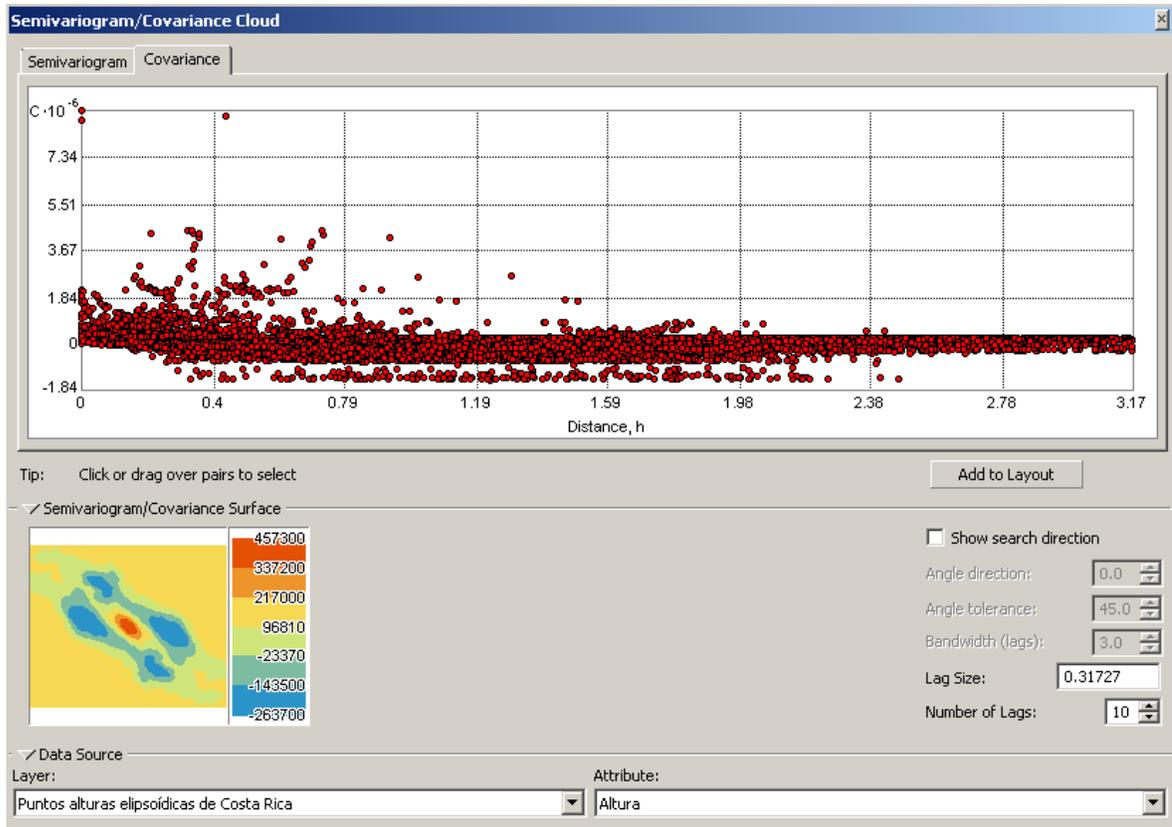


**Gráfico 3. Nube del semivariograma para las alturas elipsoidicas h.  
Fuente: ArcGIS® 10.3**

Para el semivariograma de las alturas elipsoidicas, se aprecia que la mayoría de los datos ubicados a la izquierda del eje X están más próximos y tiene valores más similares, a diferencia de los que se alejan a la derecha ya que corresponden a datos que están muy alejados entre sí. Además, como se aprecia en el recuadro rojo existen valores que están más altos en el eje Y, y presentan mayor diferencia entre ellos, lo que indica que los datos tienen dependencia espacial.

En el gráfico 4, se puede apreciar la covarianza, que determina otra forma de expresar la relación con los datos. Donde los valores por debajo de 0, o sea los negativos, corresponden a valores de los dos lugares que tienen tendencia a variar en direcciones opuestas, a diferencia de los que están por encima de 0, o sea los positivos, que indica que los valores de dos lugares emparejados tienden a variar juntos (Cañada, 2005). Para el caso de las alturas elipsoidicas, se pueden ver ambas tendencias en los valores, a diferencia de los tres puntos ubicados en la

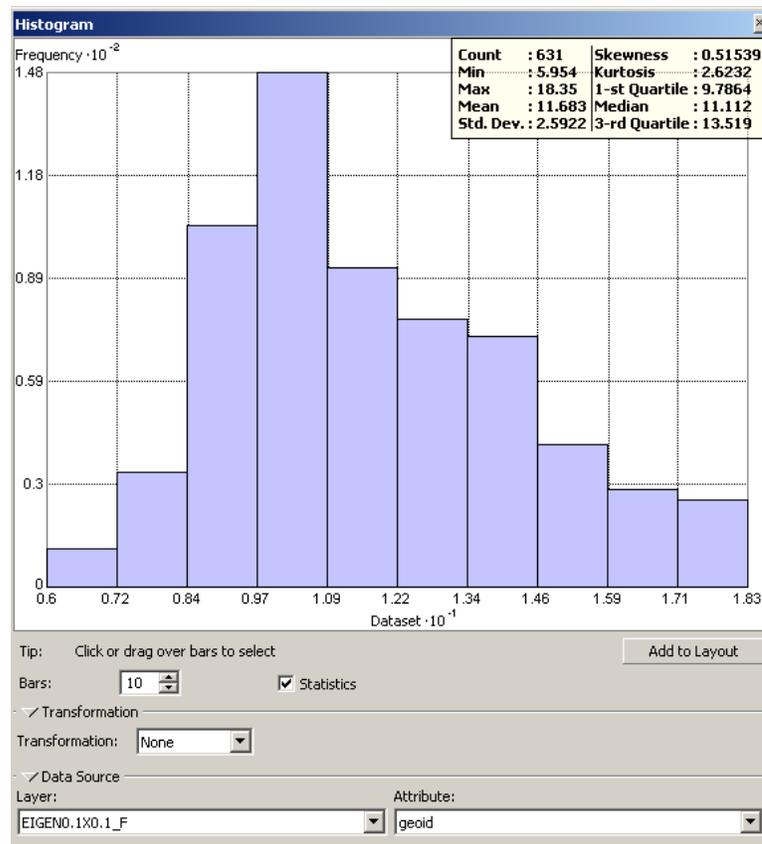
parte superior izquierda del gráfico 4, correspondiente a los puntos con valores de elevación más altos que el promedio, estos son los puntos con mayor altura reportada y que pueden ser visibles de mejor forma en el histograma.



**Gráfico 4. Nube de Covarianza para las alturas elipsoidicas.**  
Fuente: ArcGIS® 10.3

#### 4.1.2 Análisis estadístico para las ondulaciones del geoides.

En el caso de las ondulaciones del geoides los datos provienen de un modelo global y sus valores para Costa Rica varían entre los 5 y 18 m, por lo que es bastante claro en el histograma la frecuencia de los datos, y su forma es semejante a una distribución normal. (Ver gráfico 5)



**Gráfico 5. Histograma para los valores de ondulación del geoid.**  
**Fuente: ArcGIS® 10.3**

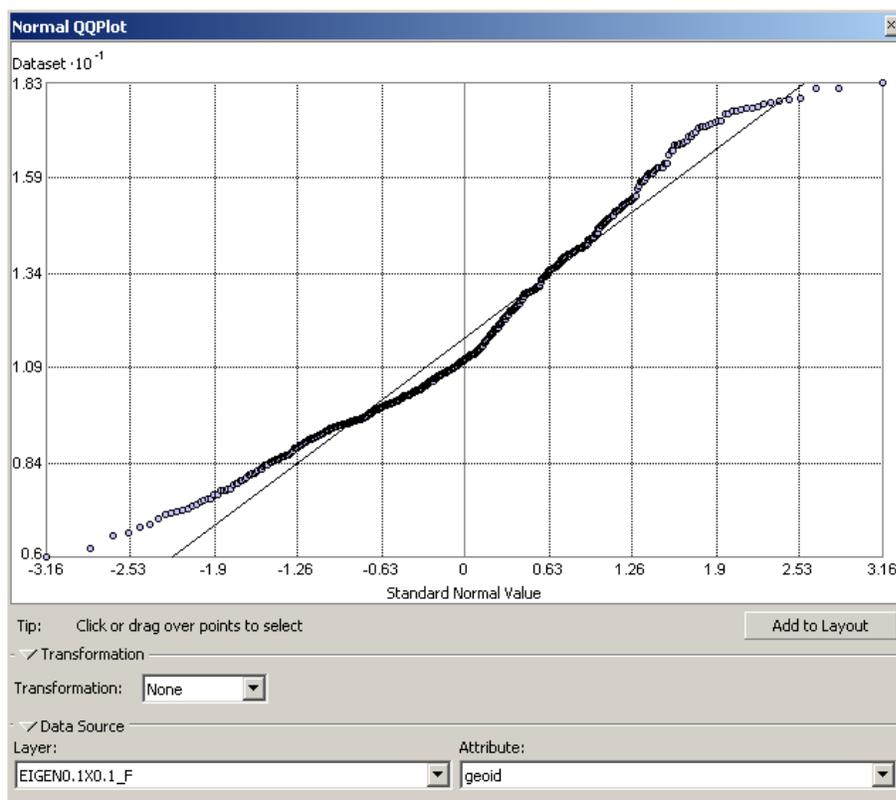
Los valores de la media y la mediana, fueron de 11.683 m y 11.112 m, respectivamente, lo que indica que los datos son bastante normales, debido a la semejanza de sus valores. De la misma manera, el valor de la desviación estándar muestra que los datos están más agrupados al valor medio.

Para el coeficiente de simetría, si bien el valor es superior de cero, que a diferencia de los valores de las alturas elipsóidicas, es de 0.51, lo que podría decirse que tiene una simetría casi perfecta, sin embargo, no todos los datos tienen la misma tendencia.

Por último, en el histograma muestra que el valor de curtosis es menor que 3, indica que cada clase contiene una proporción semejante de todos los valores.

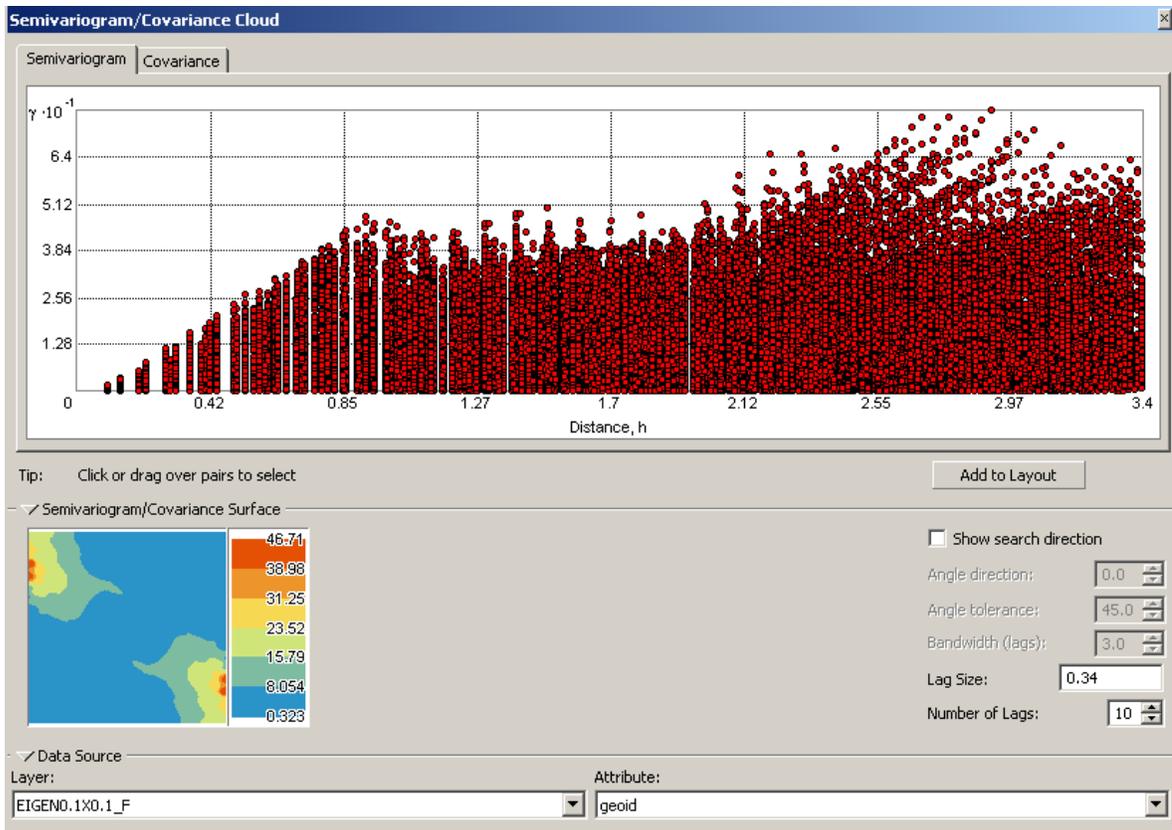
Para el caso del gráfico de probabilidad normal Q-Q (ver gráfico 6), pueden denotarse que los valores siguen una tendencia y se acercan a la recta y el ajuste

a la ley normal es aceptable.



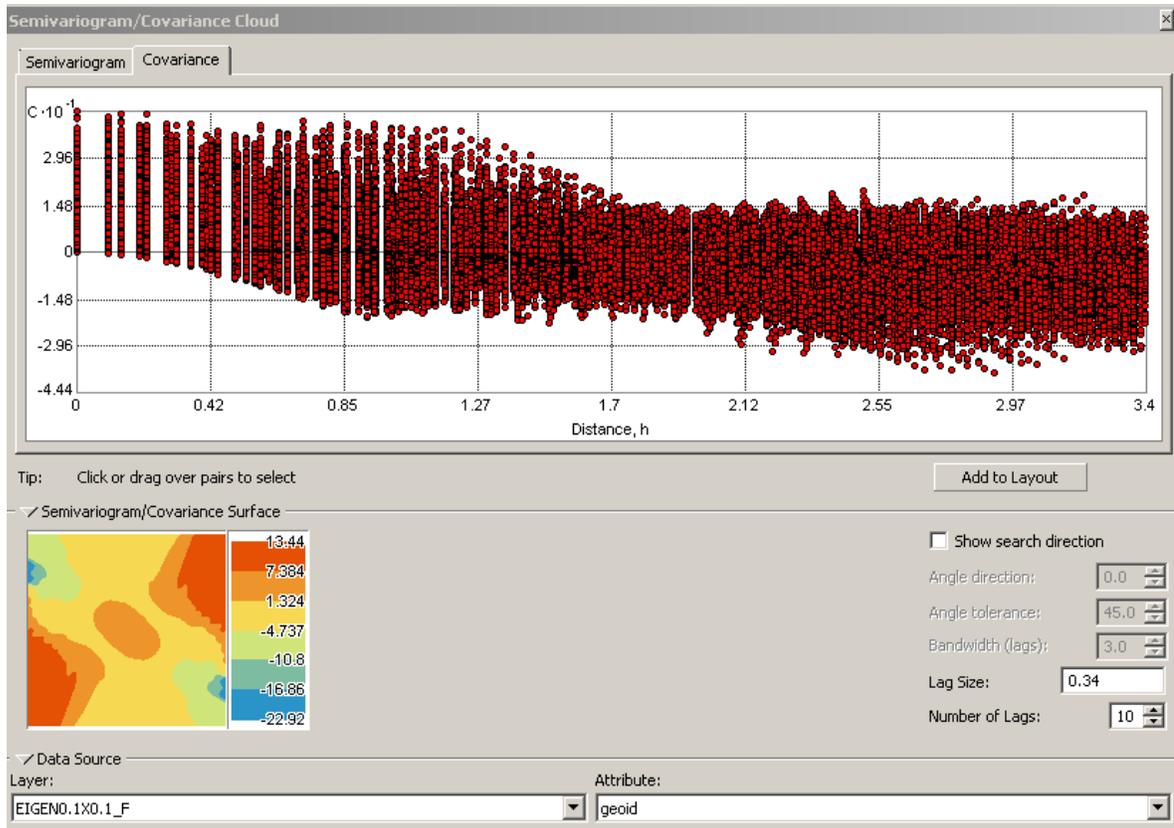
**Gráfico 6. Gráfico de probabilidad normal Q-Q, para las ondulaciones del geoides N.  
Fuente: ArcGIS® 10.3**

Para el gráfico 7 de la semivarianza para la variable de ondulaciones del geoides, se puede ver que todos los valores están próximos al eje X por tanto, los datos tienen valores similares y no tendrán una dependencia espacial. (Cañada, 2005)



**Gráfico 7. Nube del semivariograma para las ondulaciones del geoid N.  
Fuente: ArcGIS® 10.3**

Y por último, se muestra el gráfico de covarianza empírica (ver gráfico 8), en este caso muestra como tienden a variar los datos respecto a la distancia y que se comporta de manera semejante, en este caso a diferencia de las alturas elipsoidicas. Al menos la mitad de los valores están por encima del 0, por lo que tienden a un valor positivo de covarianza e indica que los valores de dos lugares emparejados tienden a variar juntos; la otra mitad, los valores menores que cero y corresponden a valores de los dos lugares que tienen tendencia a variar en direcciones opuestas.

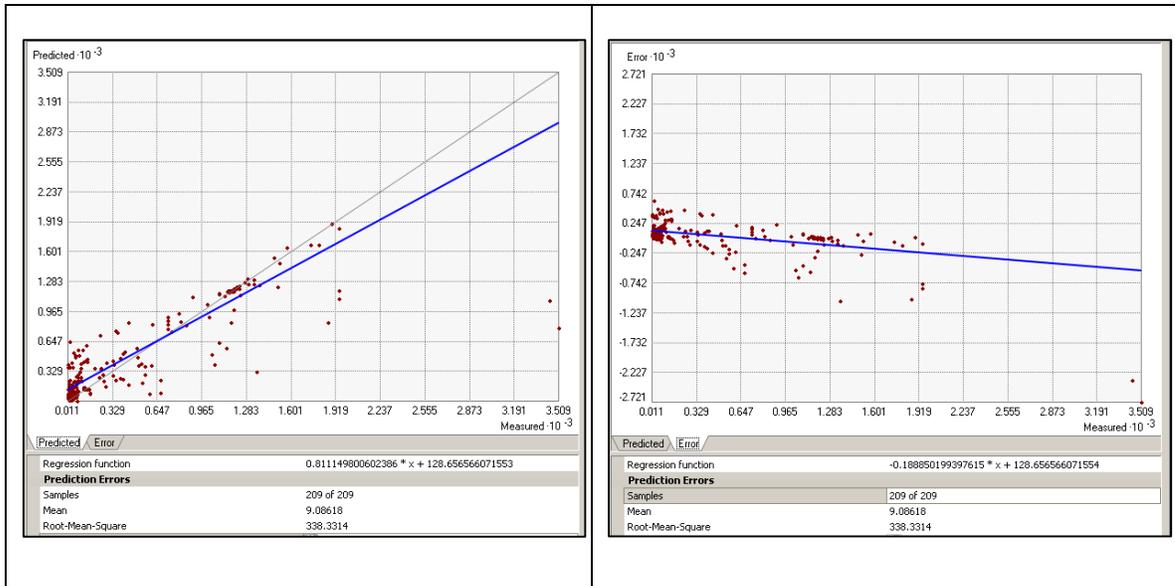


**Gráfico 8. Nube de covarianza para las ondulaciones del geoid N.  
Fuente: ArcGIS® 10.3**

#### **4.2 Resultado del análisis estructural de los datos.**

A continuación se muestra el resultado de los gráficos de los valores medidos y los valores de predicción. En el gráfico 9, se puede ver que los datos que más se alejan de la línea, son los que mayores errores presentan en su predicción.

El primer interpolador que se analizó fue el IDW, con referencia a la variable de alturas elipsoidicas, seguido de las ondulaciones del geoid.



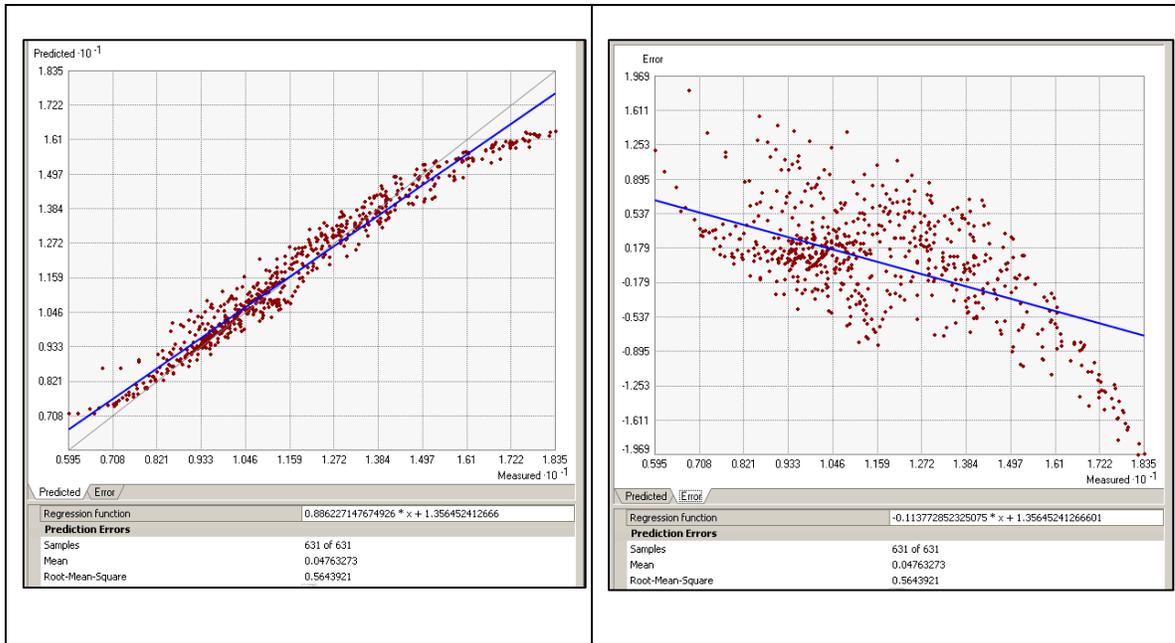
**Gráfico 9. Predicción y errores del interpolador IDW, para la variable de alturas elipsoidicas h.**

**Fuente: ArcGIS® 10.3**

Como se muestra en el gráfico 9, en el recuadro de la izquierda en el que se evalúa los valores predichos contra los valores medidos, se evidencia una gran variabilidad. Muchos de los valores se alejan de la línea, lo que indica que una cantidad importante de la muestra presenta un error elevado además como se mencionó anteriormente, los datos medidos son dispersos y existen valores extremos muy marcados.

En el gráfico 9 de la derecha, los puntos alejados de la línea son puntos con mayores errores de predicción, lo que indica que se debe de incrementar las mediciones o bien densificar los puntos de muestreo para una mejor predicción. Lo anterior implica que el valor del error medio cuadrático sea muy elevados, se deduce que el interpolador es poco confiable a la hora de crear las superficies de predicción.

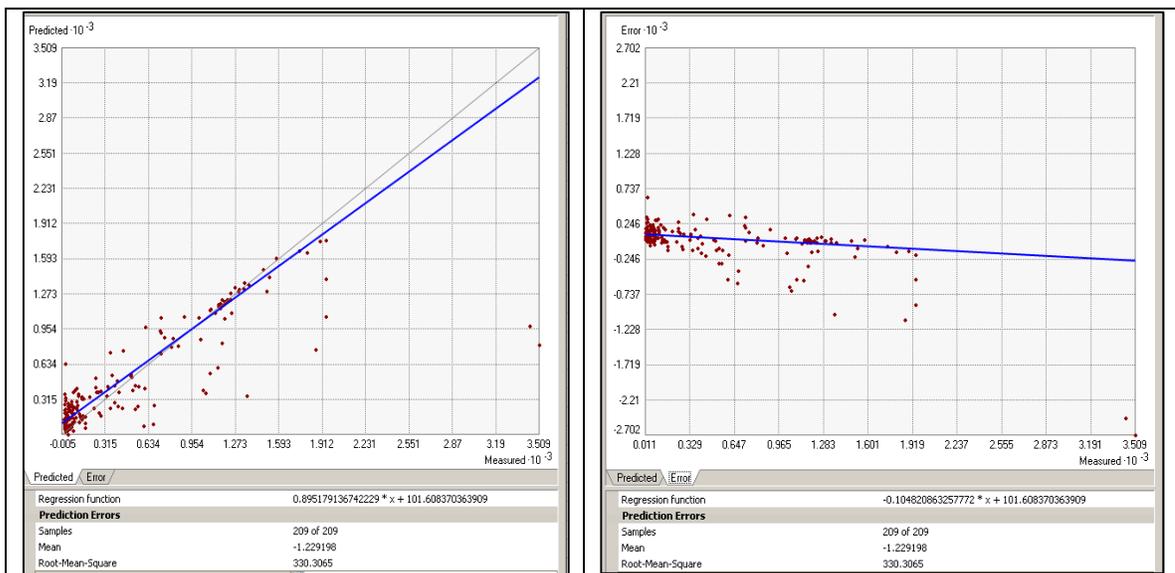
En el gráficos 10, correspondientes a las ondulaciones geoidales, los valores al provenir de una grilla de puntos, son valores continuos y semejantes entre sí, presentan un error de menos de 0,5 m.



**Gráfico 10. Predicción y errores del interpolador IDW, para la variable de ondulación del geoid N.**

Fuente: ArcGIS® 10.3

El segundo interpolador que se analizó fue el Spline, iniciando con las alturas elipsoidicas (gráfico 11), seguido de las ondulaciones del geoid el gráfico 12.

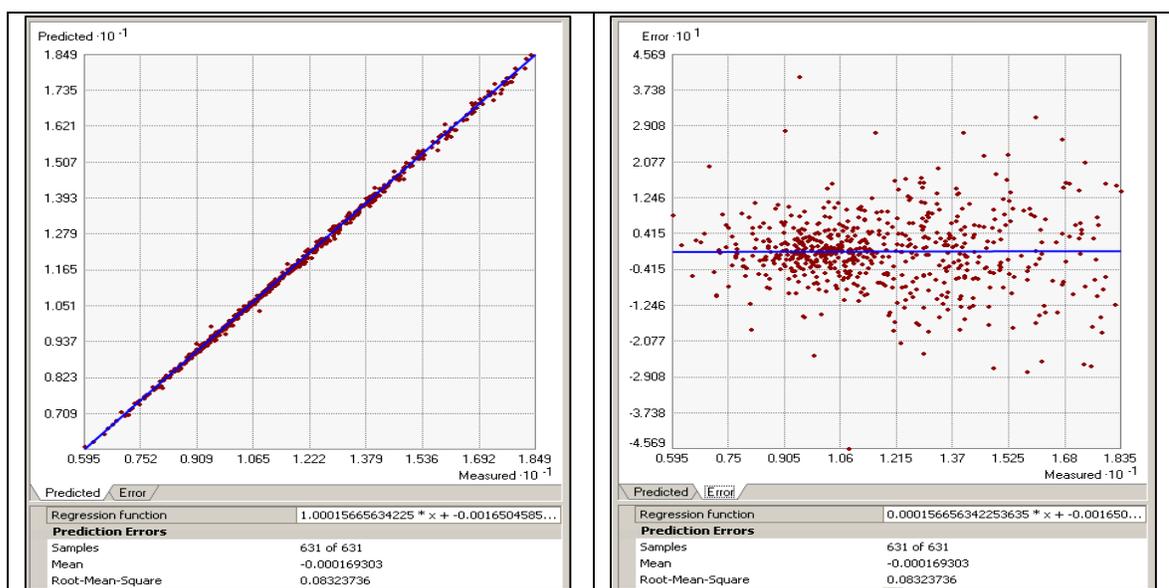


**Gráfico 11. Predicción y errores del interpolador Spline, para el variable de alturas elipsoidicas h**

Fuente: ArcGIS® 10.3

Al igual que el interpolador IDW, los valores predichos y los errores, tienen un comportamiento similar, sin embargo el error medio cuadrático en el Spline es algo menor que el IDW, aun así poco confiable estadísticamente, pudiendo crear sesgo a la hora de crear la superficie de predicción. (Ver gráfico 11)

Para el interpolador Spline, para la variable de ondulaciones del geoide, los valores medidos y los valores de la predicción son bastante similares, como se indica en el grafico 12, donde todos los valores están prácticamente sobre la línea. En el gráfico 12 de errores, los valores son variables donde están por debajo del metro, aun así el error medio cuadrático es mejor que para el interpolador Spline.



**Gráfico 12. Predicción y errores del interpolador Spline, para el variable de ondulaciones del geoide N.**  
Fuente: ArcGIS® 10.3

Para el interpolador Topo to Raster, este tipo de análisis no es posible con esta herramienta, el cual no fue posible analizarlo.

#### 4.3 Resultado de la estimación de las superficies.

Para cada uno de los interpoladores IDW, Spline y Topo to raster, se describe los resultados generados a partir de las herramientas licenciadas para ArcGIS versión

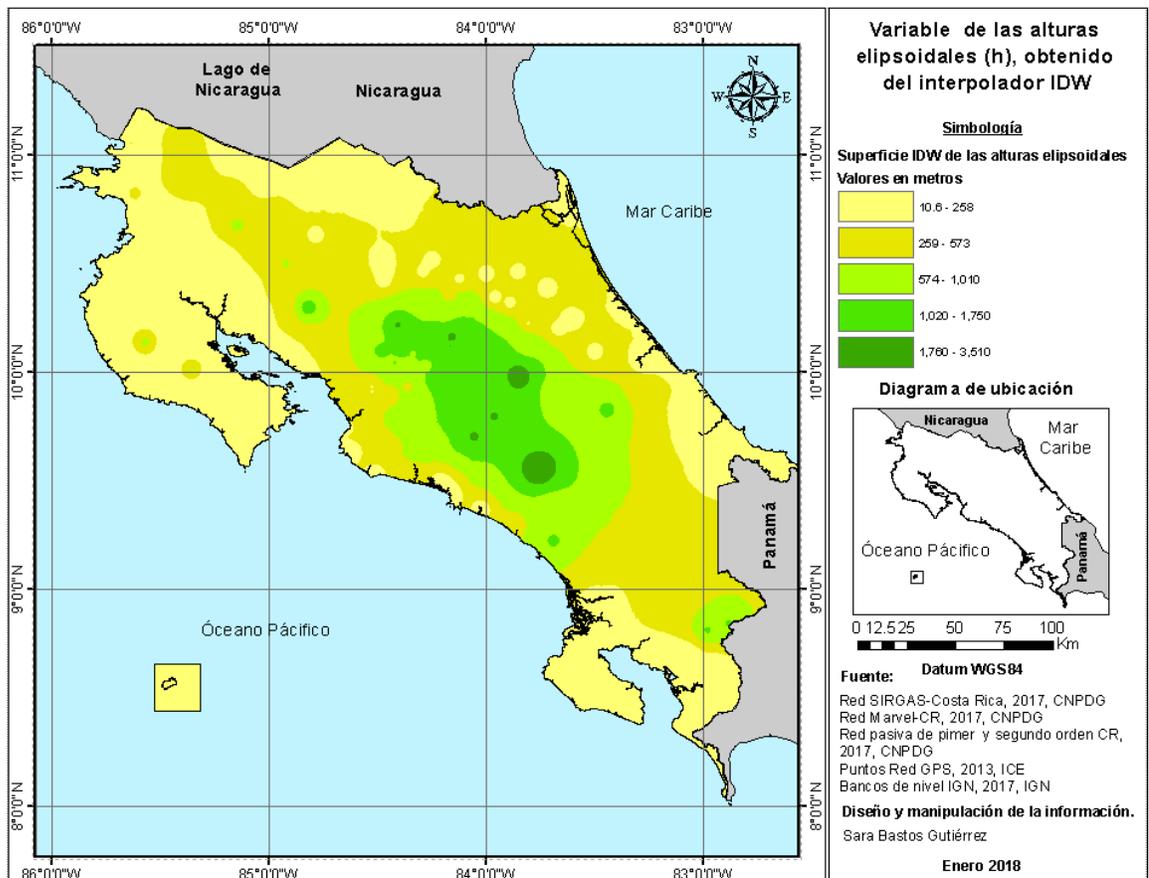
10.3.

#### **4.3.1 IDW**

A partir de lo descrito en el apartado 3.4.1, las superficies de predicción para el interpolador IDW, limita el rango de valores utilizados para la interpolación, por lo que el promedio no puede ser mayor que la entrada máxima o inferior que la entrada mínima (ESRI, 2018). De ahí que los valores que se muestran en la simbología, para las alturas elipsoídicas, son de 10.58 m y de 3501 m, correspondientes a los valores mínimos y máximos medidos, incluidos en la tabla de atributos para los puntos geodésicos del país.

El método IDW es más rápido en los cálculos, sin embargo, en la predicción tiende a producir patrones poco reales conocidos como “ojos de buey” alrededor de los puntos muestreados. Lo anterior expresa el peso que se le puede dar a la variación particular del valor en un punto de muestreo sobre los que están alrededor. (Villatoro et al, 2008). Tal como se puede ver en el mapa de alturas elipsoidales, donde es visible la creación de varios ojos de buey distribuidos en toda la superficie. Tanto en el sector oriental del país como el la península de Nicoya, existen la mayoría de ojos de buey, como se puede ver en el mapa 6, la falta de información puede ser la causante, de la creación de este fenómeno con dicho interpolador.

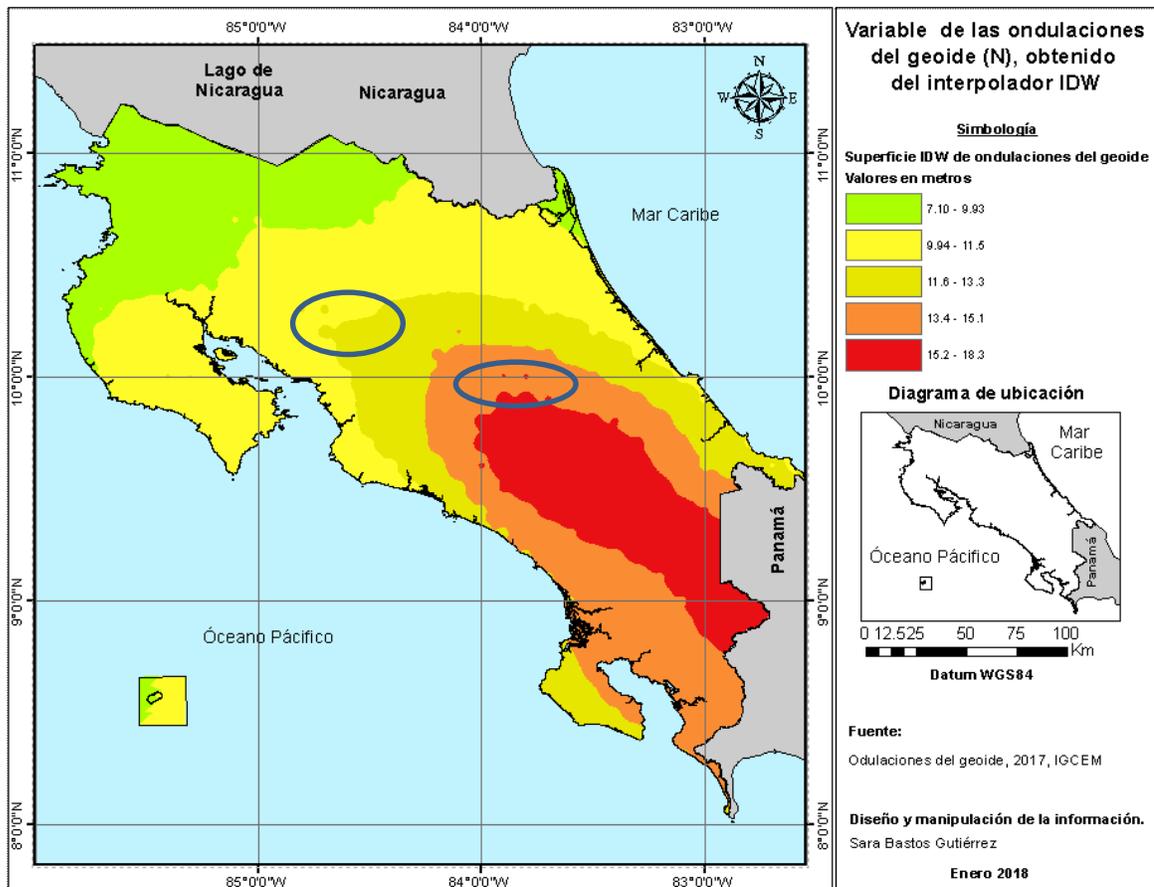
A continuación, como se indica en el mapa 7, se muestra la superficie interpolada con el interpolador IDW, para la variable de alturas elipsoídicas.



**Mapa 7. Superficie generada del interpolador IDW para la variable de alturas elipsoidicas h.**

**Fuente: Elaboración propia.**

La superficie calculada en IDW para las ondulaciones del geoides, fue generada con la misma metodología anteriormente descrita. A diferencia del mapa de las alturas elipsoidales, la superficie según lo que se desprende del mapa 8, muestra variaciones cuando existen cambios en los valores de la predicción, en los límites donde cambian los colores, donde se señala las incongruencias en el mapa.



**Mapa 8. . Superficie generada del interpolador IDW para la variable N.  
Fuente: Elaboración propia.**

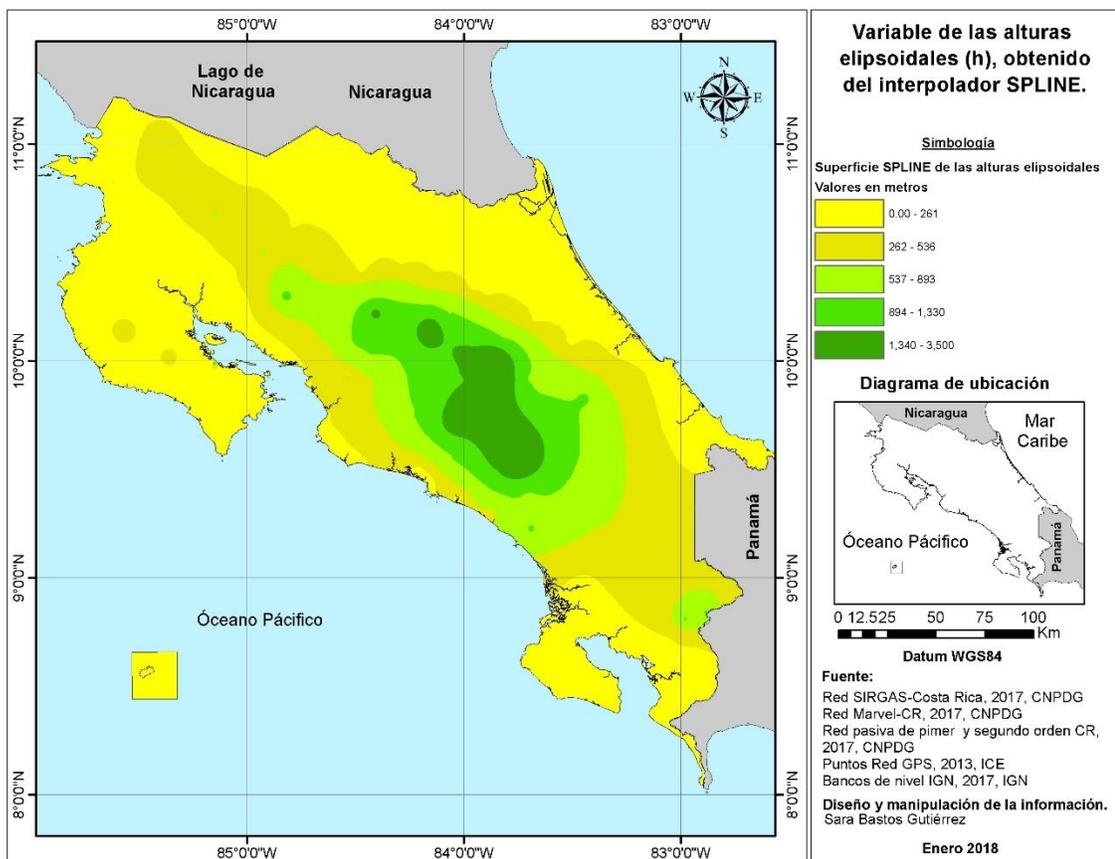
#### 4.2.2 Spline

En el caso del interpolador Spline, a diferencia del interpolador IDW, al realizar la rasterización de la predicción se crearon pixeles de valores negativos (al no ser datos regulares, el programa toma los datos cuadrículados irregulares y los remuestra para que cada pixel tenga un tamaño uniforme y sea cuadrado, a diferencia de los datos raster con espacios regulares, no se aplicará la interpolación y los datos se leerán tal cual. Recuperado de: <https://pro.ArcGIS.com/es/pro-app/help/data/imagery/interpolate-irregular data.htm>).

Aunque, si existen valores de alturas elipsoídicas negativos (en el caso que el elipsoide este por encima del geode). En esta oportunidad el interpolador interpreta

los valores de entrada (todos positivos) así que no corresponde a ese caso en particular, ya que cuando se generó la superficie interpolada, los rangos de la interpolación no presentó diferencias distintas respecto a los valores reales.

También, los valores negativos no abarcaban un área extensa, sino más bien una pequeña franja cerca del Golfo de Nicoya, debido a esto, se realizó un cambio en el valor del pixel, por medio de un condicionante en raster calculator y se cambiaron esos valores a 0 (ceros), dando como resultado el mapa para la variable de las alturas elipsoidicas según se muestra a en el mapa 9 a continuación:

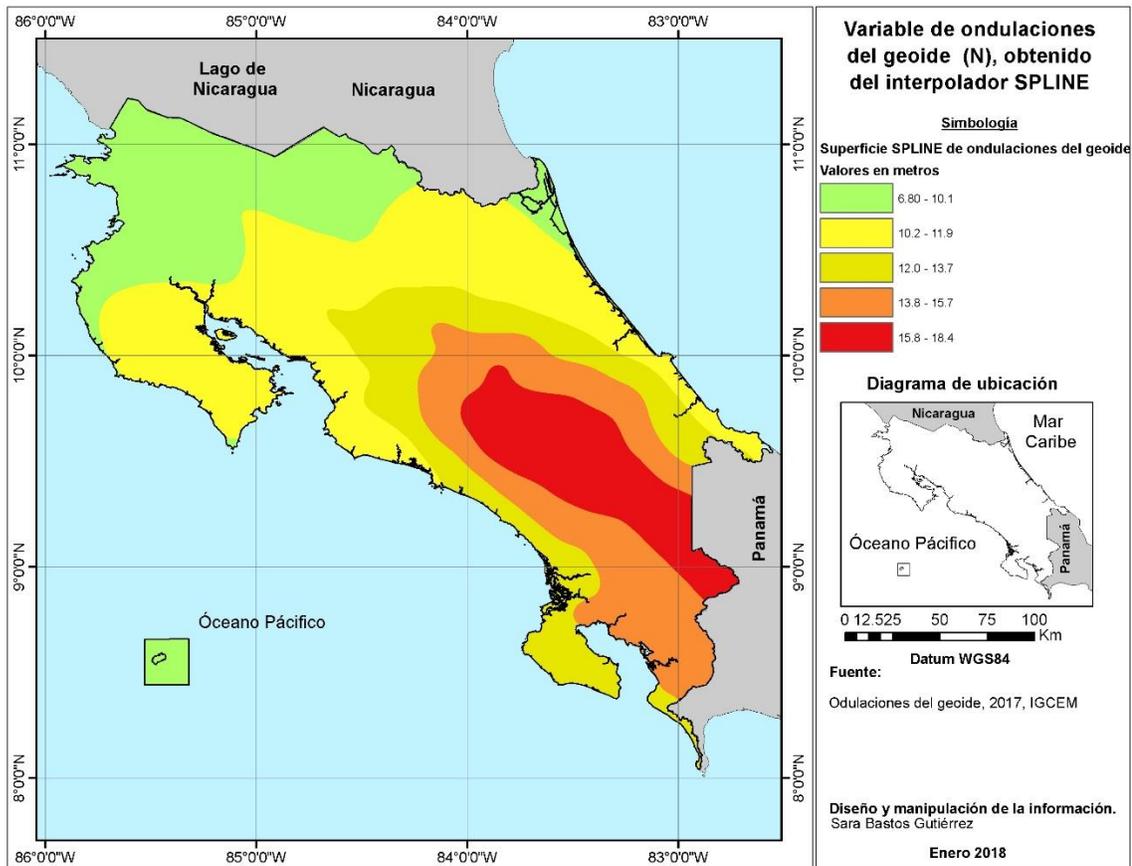


**Mapa 9. Superficie generada del interpolador SPLINE para la variable de alturas elipsoidicas h.**

**Fuente: Elaboración propia.**

En el caso del mapa de predicción para las ondulaciones del geode (ver mapa 10), con el interpolador SPLINE, no existieron variaciones de ningún tipo, se creó

bajo las mismas condiciones de la variable h. En la superficie de N, se muestra la superficie más suavizada, en comparación a la superficie generada con el interpolador IDW.



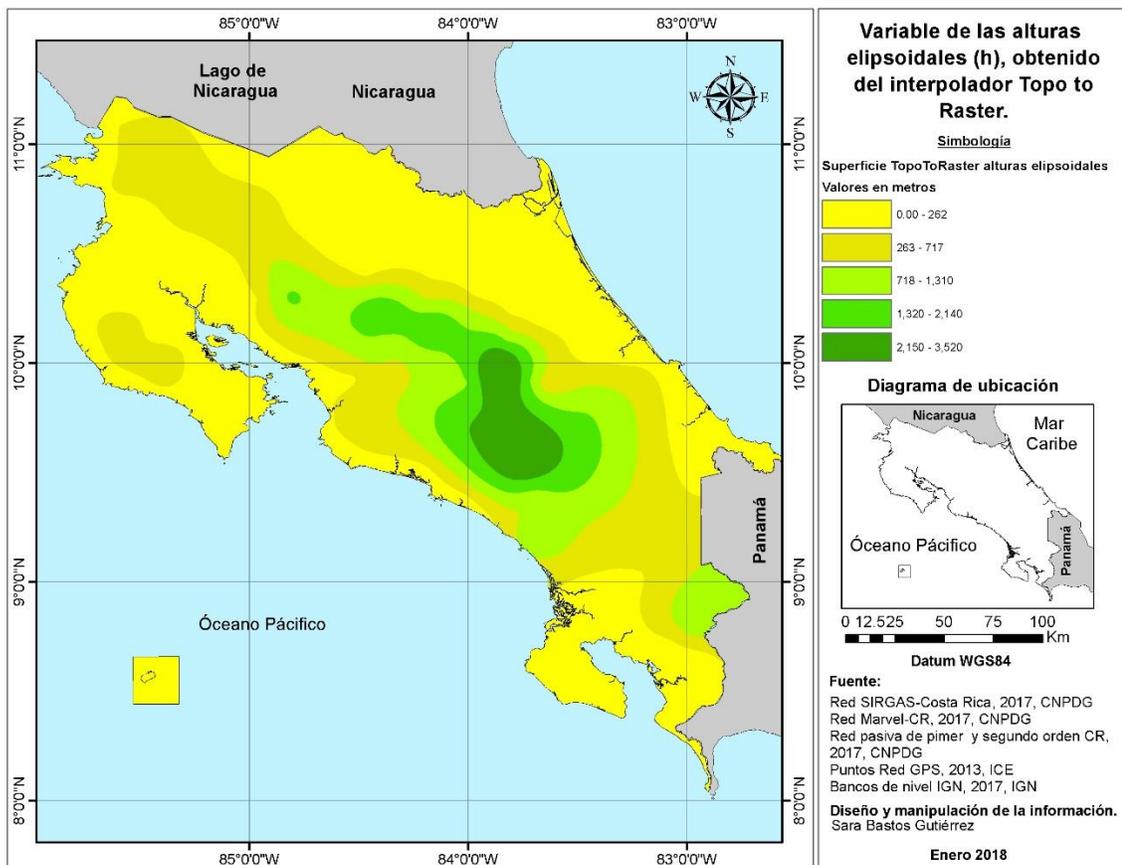
**Mapa 10. Superficie generada del interpolador SPLINE para la variable de ondulaciones del geode N.**

Fuente: Elaboración propia.

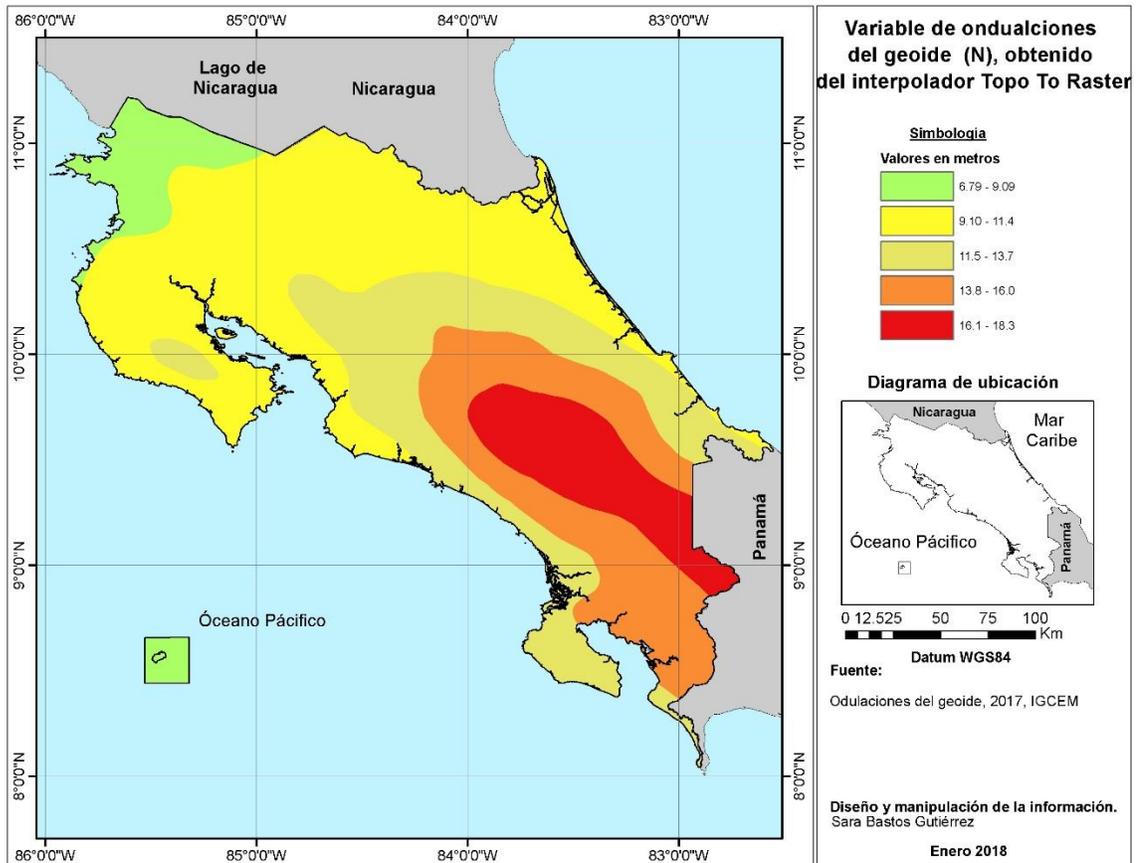
### 4.2.3 Topo to Raster

El interpolador Topo to raster, fue creado para generar modelos digitales del terreno hidrológicamente correctos, es el único diseñado para trabajar inteligentemente con entradas de curvas de nivel, por lo que, resultó ser un herramienta útil para generar un modelaje de la superficie del terreno para el proyecto (ESRI, 2018). En el caso de este interpolador creó la misma situación que Spline, valores negativos en algunas zonas, y de la misma forma se corrigieron.

A continuación se muestra los mapas del interpolador Topo to Raster para las alturas elipsoídicas  $h$  (mapa 11) y ondulaciones del geoides  $N$  (mapa 12) respectivamente.



**Mapa 11. Superficie generada del interpolador Topo To Raster para la variable  $h$ .**  
**Fuente: Elaboración propia.**

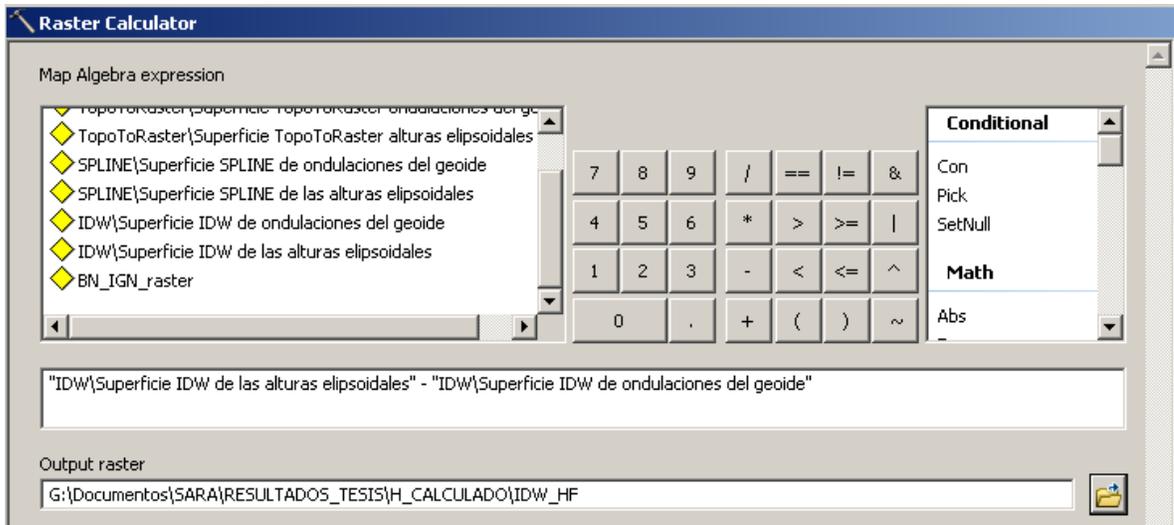


**Mapa 12. Superficie generada del interpolador Topo To Raster para la variable N.**  
**Fuente: Elaboración propia.**

En ambos casos, las superficies se muestran más suavizadas, a diferencia de los otros interpoladores.

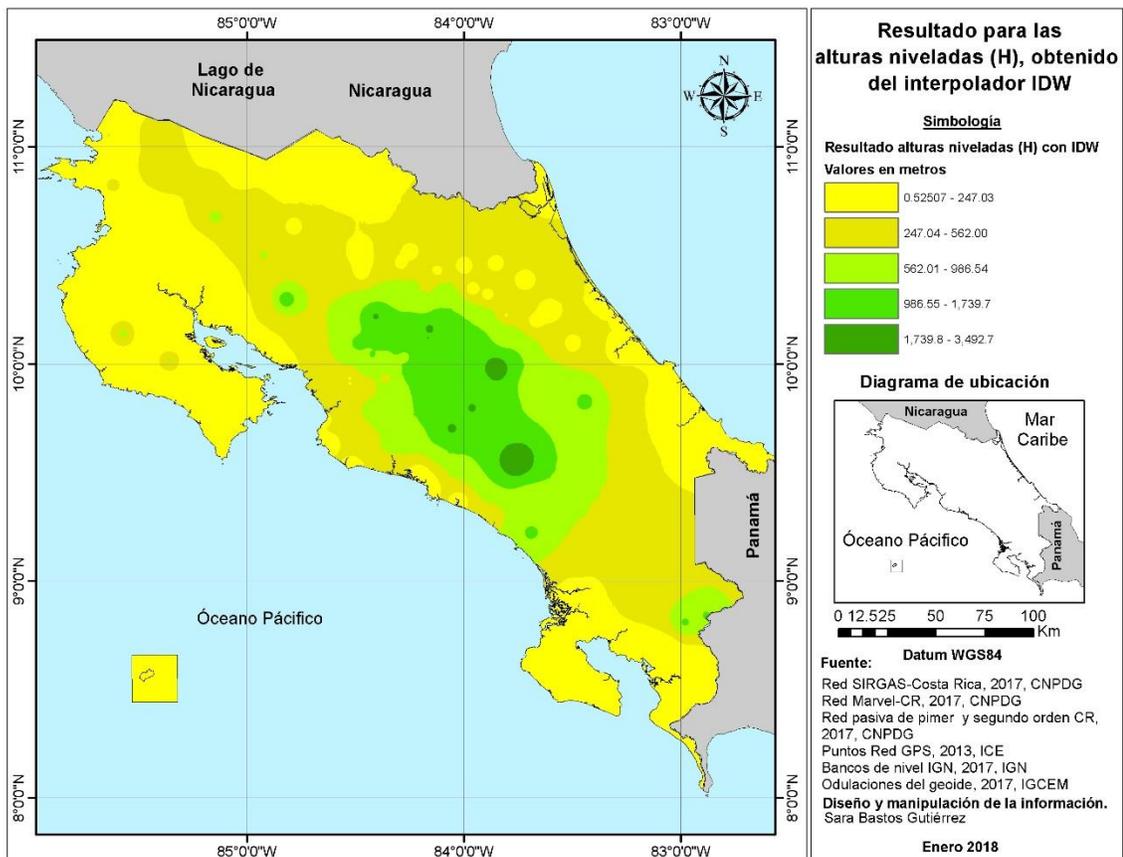
#### 4.2.4 Resultado de la estimación de las alturas niveladas calculadas.

Las superficies de las alturas niveladas (H), fueron calculadas por diferencia de los mapas anteriormente creados para cada interpolador. En el ejemplo de la siguiente imagen, para el interpolador IDW, donde  $IDW \setminus \text{Superficie IDW de alturas elipsoidales} - IDW \setminus \text{Superficie IDW de ondulaciones del geode} = IDW\_H$  calculada.



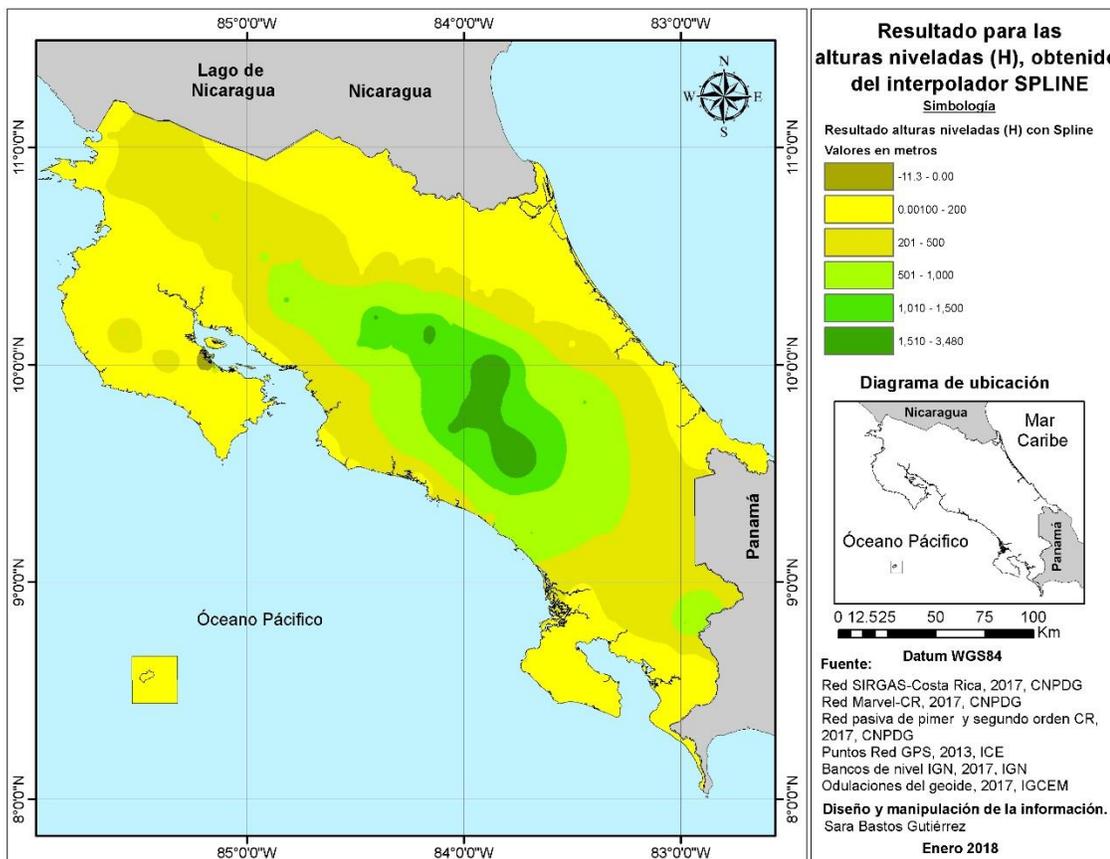
**Figura 22. Ejemplo de cálculo, superficie H del interpolador IDW.**  
Fuente: Elaboración propia.

En el mapa 13, el resultado para el interpolador IDW.



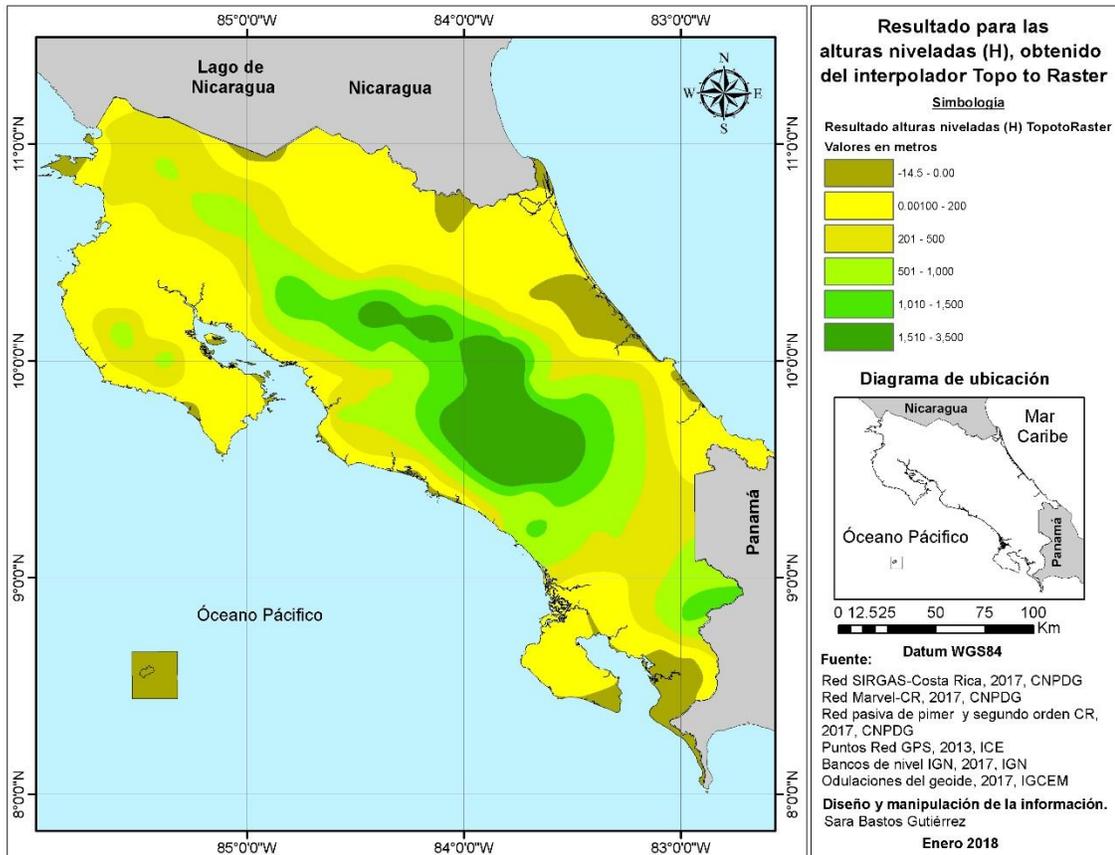
**Mapa 13. Superficie de alturas niveladas H con el interpolador IDW.**  
Fuente: Elaboración propia.

En el mapa 14, la superficie de alturas niveladas para el interpolador Spline, en este caso los valores negativos corresponderán a la diferencia de las alturas elipsoídicas donde su valor fue cambiado a 0. Al restarle a estos puntos el valor de la ondulación del geode se considera ahora un valor negativo de esta variable.



**Mapa 14. Superficie de alturas niveladas H con el interpolador Spline.**  
**Fuente: Elaboración propia.**

Y por último, el mapa de superficie para el interpolador Topo to raster, de la misma manera que Spline, los valores negativos, corresponde a los valores de la ondulación negativos.



**Mapa 15. Superficie de alturas niveladas H con el interpolador Topo to raster.**  
**Fuente: Elaboración propia.**

#### 4.4 Comparación y diferencias de las superficies.

Tal como se mencionó, en el apartado 3.5.2, se crearon las tablas de diferencias entre las superficies de alturas niveladas para cada interpolador y la superficie de los bancos de nivel oficiales de Costa Rica. Se agruparon los valores por rangos, esto permitió tener más claridad a la hora de visualizar en el mapa las mayores diferencias en cada interpolador. A continuación se muestra, las tablas de atributos de las diferencias para cada interpolador:

**Tabla 2. Diferencias de superficie calculada H, con el interpolador IDW y los bancos de nivel oficial de Costa Rica.**

VALUE	COUNT	RANGO	PROMEDIO (m)	DESV_PROM (m)
1	37	-1800--1000	-1329.344	31.842
2	79	-1000--500	-673.976	13.426
3	167	-500--100	-260.654	8.703
4	191	-100--50	-72.927	0.926
5	792	-50-50	10.365	0.789
6	587	50-100	73.446	0.593
7	380	100-500	219.642	4.451
8	31	500-1000	623.963	19.234
9	3	1000-1400	1364.171	55.753

Fuente: Elaboración propia

**Tabla 3. Diferencias de superficie calculada H con el interpolador Spline y los bancos de nivel oficiales de Costa Rica.**

VALUE	COUNT	RANGO	PROMEDIO (m)	DESV_PROM (m)
1	40	-1800--1000	-1275.187	31.394
2	84	-1000--500	-666.258	13.972
3	267	-500--100	-262.152	7.012
4	81	-100--50	-71.379	1.605
5	675	-50-50	10.059	0.978
6	322	50-100	76.427	0.781
7	770	100-500	190.153	3.167
8	25	500-1000	580.893	20.943
9	3	1000-1400	1282.345	55.685

Fuente: Elaboración propia

**Tabla 4. Diferencias de superficie calculada H con el interpolador Topo to raster y los bancos de nivel oficiales de Costa Rica.**

VALUE	COUNT	RANGO	PROMEDIO (m)	DESV_PROM (m)
1	20	-1800--1000	-1304.486	45.081
2	30	-1000--500	-632.890	25.450
3	163	-500--100	-266.747	8.724
4	86	-100--50	-73.680	1.648
5	1156	-50-50	4.245	0.631
6	278	50-100	73.143	0.852
7	419	100-500	211.454	5.231
8	95	500-1000	695.230	15.128
9	34	1000-1400	1360.835	39.272

Fuente: Elaboración propia

Para cada tabla, al realizar la clasificación existen valores extremos para cada interpolador, donde las mayores diferencias en promedio para IDW están entre los -1329.44 m y los 1364.11 m. Para el interpolador de Spline, entre los -1275.18 m y 1282.345 m y para Topo to raster, entre los -1304.486 m y 1360.835 m. Cuando se realiza el análisis, las mayores variaciones en todos los interpoladores se dan donde el modelo interpreta valores muy diferentes en comparación a los valores de altura de los bancos de nivel.

Sin embargo, se realizó el análisis para las 3 superficies H calculadas con menores diferencias, de forma que permitió la comparación entre los valores oficiales de alturas del IGN y las superficies calculadas por interpolación.

En la tabla 4, se presenta un resumen de cada interpolador con la cantidad de datos por rango, el rango con menores diferencias, promedio de las diferencias y las desviación estándar de cada promedio.

**Tabla 5. Resumen de menores diferencias por interpolador.**

<b>Interpolador</b>	<b>Cantidad</b>	<b>Rango (m)</b>	<b>Promedio (m)</b>	<b>Desviación estándar promedio (m)</b>
<b>IDW</b>	792	-50-50	10.365	0.789
<b>Spline</b>	675	-50-50	10.059	0.978
<b>Topo to raster</b>	1156	-50-50	4.245	0.631

**Fuente: Elaboración propia.**

Los valores de -50 m a 50 m, fueron los datos que se utilizaron como los de menores diferencias, sin embargo, en la tabla general existen diferencias de menos de 1 m, para algunos casos correspondían al 1% de los datos.

Para los tres interpoladores el que presentó menores diferencias, fue el interpolador Topo to Raster, con un promedio de diferencias de 4,245 m  $\pm$  0,63 m, y corresponde a un 50.67 % del total de los datos, y el que presentó mayores diferencias en este rango fue el interpolador Spline, con un promedio de diferencias de 10,059 m  $\pm$  0,978 m. y en el porcentaje en este rango corresponde al 30 %. No obstante, fue el interpolador que presento la mayor desviación estándar del promedio, a diferencia del IDW, donde indican cuanto se alejan los valores del promedio, casi 20 cm menos

que el Spline.

El interpolador Topo to Raster, cumple con el objetivo propuesto, fue el interpolador con mayor asertividad para la estimación de las alturas niveladas para Costa Rica, y el que cumple con dar mayor confiabilidad de la superficie interpolada para ciertas regiones del país.

## CAPÍTULO V

### 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

A partir de la información suministrada por diferentes fuentes, se pudo determinar las superficies de interpolación y con ello realizar la evaluación de cuál podría ser el mejor interpolador para presentar la superficie topográfica de Costa Rica de las variables de alturas elipsoídicas y ondulaciones del geoide.

En el análisis exploratorio de las variables, se pudo ver la información con valores extremos para cada conjunto de datos. Para las alturas elipsoídicas que fueron datos medidos, no se excluyeron, ni realizaron transformaciones de ningún tipo, dejando claro que son puntos medidos con tecnología GNSS, y ubicados a lo largo del territorio costarricense, además han servido de referencia planimétrica en el país. Muchos de estos datos son procesados y presentan en la mayoría de los casos exactitudes milimétricas, por lo que sus posiciones se asumen como confiables. Aunque, en el análisis por su distribución normal y la dispersión en sus valores, el análisis estadístico resulta ser tan variable en cada uno de sus componentes, aun así, tal y como se trabajaron permitieron servir de insumo para el proyecto. Por el contrario, las ondulaciones del geoide, donde sus valores eran constantes, y la tendencia de los valores semejantes a una distribución normal.

En el análisis estructural respecto a los errores para cada interpolador, indicaron en todos los casos que es necesario incrementar las mediciones y densificar los puntos de muestreo, lo cual obviamente permite mejorar los valores y errores de predicción, para los interpoladores tanto en IDW como para Spline. Según su análisis las superficies creadas no son confiables estadísticamente para la variable de alturas elipsoídicas a diferencia de la variable de ondulación del geoide. Para el interpolador Topo to Raster no fue posible realizar mediante el Geostatistical Analysis ese análisis estructural del interpolador, a pesar de esto se realizó la comparación con el mapa de alturas niveladas oficiales para el país.

Se tuvo como resultado, tres mapas de superficie topográfica (H) con cada

interpolador, IDW, Spline y Topo to Raster (ver mapas 13, 14, 15). De esto, la fiabilidad del interpolador está dada por el método que utiliza para interpolar. En el caso del Topo to Raster puede ser el más confiable en el sentido que fue creado para generar modelos digitales del terreno y ya que fue hecho específicamente para trabajar de forma inteligente para crear curvas de nivel e igualmente, tiene más opciones de limitar el interpolador con otras capas.

Lo anterior implicó hacer la comparación y diferencias entre los modelos de interpolación, el Topo to Raster fue el que presentó menores diferencias en el 50% de los datos, con un promedio de 4,25 m, y una desviación estándar del promedio de 0,63 m. Además, alrededor del 2% de los datos presentaron una diferencia promedio de 1 metro, las menores diferencias se dieron para todos los modelos, en la zona que contaba con la mayor cantidad de puntos medidos. Lo que puede concluir que este interpolador es el que permite utilizarse como “referencia”.

El proyecto de graduación, no puede realizar ningún criterio sobre la validez de las alturas de la red vertical oficial para Costa Rica, a pesar de sus alturas se mantienen desactualizadas, corresponden a la referencia vertical del país, y permitió realizar las comparaciones y las diferencias entre los métodos de interpolación.

Los métodos de interpolación crean valores donde no existe información, muchos de estos resultan ser confiables en gran medida, en este proyecto a pesar del faltante de información en algunos sectores, para los interpoladores resultaron ser bastante efectivos, específicamente en el caso del Topo to Raster.

Bajo estas consideraciones y realizando el análisis, se puede concluir que para el conjunto de datos usados y con las condiciones seleccionadas, Topo to Raster representa el interpolador que mejor genera la superficie de alturas niveladas en el país.

Los métodos de interpolación, son recomendados, para este caso en particular en la zona que presenta mayores coincidencias con la superficie de alturas niveladas oficiales para Costa Rica, siendo la zona central del país, dado a la gran diferencia

como en las zonas de Guanacaste, Limón y la Cordillera de Talamanca, donde la información de partida es escasa.

## Bibliografía

- Arce, R. (2016). Geostatística e Interpolación espacial: métodos estocásticos. Costa Rica : Apuntes de clase Geoestadística.
- Arias, J., & Rivas, M. (Septiembre de 2011). Determinación geométrica de la ondulación del geoide a lo largo de un tramo de la REDNAO, OCAÑA y su comparación con el geoide geométrico. España: Universidad Politécnica de Madrid.
- Arrieta, R., Sánchez, R., & Londoño, L. (2014). Análisis geoestadístico para la estimación oro y cobre en depósitos de tipo pórfido. *Ing. USBMed, Vol. 5, No2*, 80-88.
- Cañada, M. (2005). Análisis exploratorio de datos espaciales (ESDA). En A. Moreno, *Sistemas y análisis de la información geográfica: Manual de autoaprendizaje de ArcGIS* (págs. 745-778). España: RA-MA.
- Chile, U. (s.f.). La interpolación espacial los modelos digitales del terreno (MDT): sección VII. Sistemas de Información Geográfica, Facultad de Ciencias Forestales, Universidad de Chile.
- Cifuentes, A. (2016). Evaluación de diferentes métodos de interpolación para la variable precipitación en el departamento de Caldas-Colombia. Colombia: Universidad de Manizales, Facultad de Ciencias e Ingeniería.
- Dorman, M. (2014). *Learning R for Geospatial Analysis*. Uk: Pack Publishing Ltd.
- ESRI. (2018). [www.arcgis.com](http://desktop.arcgis.com/es/arcmap/10.3/tools/spatial-analyst-toolbox/how-idw-works.htm). Obtenido de <http://desktop.arcgis.com/es/arcmap/10.3/tools/spatial-analyst-toolbox/how-idw-works.htm>
- Förste, C., Bruinsma, S., Abrikosov, O., Lemoine, J.-M., Marty, J. C., Flechtner, F.,

- . . . Biancale, R. (2014). EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. GFZ Data Services. .
- Gabriela, C. (2010). Desarrollo de un modelo Geoidal CGV08 como insumo para la determinación nacional del Geoide. *Uniciencia*, 35-52.
- Gemael, C. (2012). *Introducao à Geodésia Física*. Curitiba: UFPR.
- Geotecnologías. (2006 ). *Recopilado a partir de los documentos generados en la contratación "Definición y oficialización del sistema nacional de referencia "*. Base de datos de la Red Nacional de Coordenadas.
- Ginzo, M. J. (s.f.). *Análisis Geoestadístico de datos funcionales*. Universidad de Santiago Compostella, Universidade da Coruña, Universidade de Vigo.
- Giraldo, R. (2002). *Introducción a la Geoestadística: Teoría y Aplicaciones*. Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Hoffman-Wellenhof, Lichtenegger, & Wasle. (2008). *GNSS-Globla Navigation Satellite System*. New York: Springer Wien New York.
- Hofmann-Wellenhof, B., & Moritz, H. (2005). *Physical Geodesy*. Austria: Springer-Verlag Wien.
- IGN. (2007). *El Sistema de Referencia CR05 y la Proyección Transversal Mercator para Costa Rica CRTM05*. San José : Unidad Ejecutora del Programa de Regularización del Registro y Catastro.
- Isaaks, E., & Srivastava, R. (1989). *An Introduction to Applied Geostatistics*. New York, 561 pp: Oxford University Press.
- Jekeli, C. (2000). *Heights, The Geopotential and Vertical Datums*. Ohio State: Department of Civil and Enviromental Engeniering.
- Jorge Moya Zamora, E. D. (2004). Estudio de la ondulación del Geoide. *Uniciencia*,

151-155.

Journel, A., & Huijbregts, C. (Mining Geostatistics). 1978. London: Academic .

Linares, F., Arráiz, D., & Nuris. (2015). Mapa de anomalías de Bouguer de Venezuela derivado del modelo combinado EIGEN-6c4. *Geociencias aplicadas Latinoamericanas*.

Lu, Z., Qu, Y., & Qiao, S. (2014). *Geodesy- Introduction to Geodetic Datum and Geodetic System*. Springer Heidelberg New York Dordrecht London.

Lu, Z., Qu, Y., & Qiao, S. (2014). *Geodesy: Introduction to Geodetic Datum and Geodetic System*. Springer.

Matheron, G. (1965). *Les variables régionalisées et leur estimation. Une application de la théorie des fonctions aleatoires aux sciences de la nature*. París.

Mena, J. (2007). *Geodesia Superior*. España: Instituto Geográfico Nacional de España.

Moreno, J. (2009). *Introducción a la Geoestadística y su Aplicación* . México.

Moya, J., Ovarés, D., Bastos, S., & Valverde, J. (2016). Monitoreo Geodésico de la Corteza Terrestre. Costa Rica: Congreso Internacional de Topografía, Catastro, Geodesia y Geomática 2016. Edición XIV.

Murillo, D., Ortega, I., Carrillo, J., Pardo, A., & Rendón, J. (2012). Comparación de métodos de interpolación para la generación de mapas de ruido en entornos urbanos. *Ing. USBMed, Vol.3 N°1*.

Myers, D. (1987). *Optimatization of Sampling Locations for Variogram Calculation*. Water Resources Research.

Núñez, A. (2006). Determinación de un geoide de precisión en áreas de pequeña extensión. Aplicación en el Parque Nacional DOÑANA. España: Universidad Politécnica de Cataluña.

- Perales, M. L. (2016). *Generación automática de mapas agroclimáticos a partir de recursos en red*. Universitat Politècnica de València .
- Quesada, M., & Marsik, M. (2012). Uso de modelos de elevación digital como alternativa para mostrar errores en mapas topográficos. *Revista Geográfica de América Central N° 48*, 77-93.
- Sánchez, L. (2002). Determinación de Alturas Físicas para Colombia. Colombia.
- Sánchez, L., & Martínez, W. (s.f.). Hacia un nuevo Sistema Vertical de Referencia en Colombia.
- Sánso, F., & G.Sideris, M. (2013). *Geoid Determination* . Springer.
- Sauer, M. (2014). Nociones de geodesia y GPS.
- Smith, M., Goodchild, M., & Longley, P. (2017). *Spatialanalysisonline* . Obtenido de [http://www.spatialanalysisonline.com/HTML/?radial\\_basis\\_and\\_spline\\_functi.htm](http://www.spatialanalysisonline.com/HTML/?radial_basis_and_spline_functi.htm)
- Vieux, B. (2001). Surface Generation, Distributed Hydrologic Modeling Using GIS. Springer Science+Business Media Dordrecht.
- Villaverde, M. Á., Matesanz, F. J., Sobrino, J. A., Pérez, M. V., López, P. G., Mourón, A. D., & Sánchez, L. (2011). *Apuntes Curso Avanzado de Posicionamiento por Satélite*. Instituto Geográfico Nacional de España.
- Villatoro, M., Henríquez, C., & Sancho, F. (2008). Comparación entre los interpoladores IDW y Kriging en la variación espacial de PH,CA,CICE y P del suelo. *Agronomía Costarricense*, 95-105.

## Anexos

Listado de puntos de la red de primer orden de Costa Rica

NOMBRE	LATITUD NORTE			S <sub>LAT</sub> [mm]	LONGITUD OESTE			S <sub>LON</sub> [mm]	ALTURA ELIPSOÍDICA [m]	S <sub>ALT</sub> [mm]
	°	'	"		°	'	"			
ALEGRE	9	0	47.994170	3.0	83	7	56.081220	4.0	334.342	22.0
BELLA	9	49	53.857990	4.0	84	17	13.128120	5.0	802.293	29.0
BLANCA	9	36	29.408650	6.0	85	8	44.010900	7.0	13.678	52.0
BUVIS	9	33	14.613640	3.0	83	45	23.695580	4.0	3509.109	23.0
CHILES	11	1	56.321310	7.0	84	42	40.941000	9.0	49.813	44.0
COLES	9	44	44.929040	5.0	84	37	35.358800	5.0	139.226	38.0
CRUCITAS	10	52	36.058200	7.0	84	19	44.643360	9.0	83.464	41.0
CUCARACHA	10	37	36.660750	7.0	84	46	59.178590	9.0	198.842	42.0
DOMINICAL2	9	17	58.116500	3.0	83	52	2.023540	3.0	352.031	16.0
ETCG	9	59	58.135920	0.0	84	6	21.229800	0.0	1193.691	0.0
GARZA	9	54	39.125060	9.0	85	38	35.419600	11.0	14.136	84.0
GIGANTA	10	40	41.444970	7.0	85	8	41.042810	9.0	669.980	45.0
GRANDE	10	34	16.796950	9.0	85	38	42.143860	12.0	168.933	75.0
GUÁCIMO	10	11	56.818930	5.0	83	40	0.351330	6.0	118.805	34.0
IRAZU	9	58	36.182060	4.0	83	51	11.296590	5.0	3442.087	31.0
JUDAS3	9	31	43.170530	4.0	84	30	21.207890	4.0	63.251	31.0
LA CRUZ	11	3	15.370430	13.0	85	38	1.190080	22.0	267.246	85.0
LAUREL	8	26	20.291190	3.0	82	54	17.522970	4.0	30.893	23.0
LIMÓN1	9	57	43.851370	0.0	83	1	34.533170	0.0	12.964	0.0
LUCIA	10	13	45.229630	0.0	85	11	23.883700	0.0	122.501	0.0
LUIS2	8	50	25.765110	3.0	82	52	52.544070	3.0	1036.284	24.0
MAÍZ	9	2	59.367520	4.0	83	27	27.579910	5.0	327.577	32.0
MANZANILLO2	9	38	2.598580	4.0	82	39	21.694380	4.0	12.023	25.0
MONTEVERDE	10	17	53.097160	5.0	84	49	0.065350	6.0	1358.428	43.0
MORAVIA	9	49	36.563560	4.0	83	26	26.988540	4.0	1141.847	26.0
NEGRO	10	27	39.732930	6.0	83	51	9.192000	7.0	145.157	35.0
PARISMINA	10	18	19.821400	6.0	83	20	55.229910	7.0	12.245	37.0
SIRENA	8	28	49.307540	0.0	83	35	22.397350	0.0	24.986	0.0
SURETKA	9	34	20.808770	3.0	82	56	20.197500	3.0	69.023	17.0
TAMARINDO2	10	18	17.153470	11.0	85	48	14.249740	16.0	36.571	80.0
TERECITA	10	46	23.886790	7.0	83	35	13.240430	10.0	10.587	48.0
UJARRAS	10	16	18.239250	5.0	84	10	56.622050	6.0	851.479	40.0
VERACRUZ	10	30	52.598390	6.0	84	14	42.875780	7.0	102.824	38.0
VICTORIA	10	59	50.406890	0.0	85	7	0.967880	0.0	47.150	0.0

Tabla de puntos red GPS, ICE.

Punto	Latitud	Error	Longitud	Error	Longitud	Altura	Error
	decimal	[mm ]	decimal	[mm ]	GIS	[m]	[mm ]
ABA3	10.29369044	8.0	84.96470777	11.0	-84.96470777	258.777	21.0
ACOSTA1	9.80563558	9.0	84.14937231	10.0	-84.14937231	1240.615	27.0
AIR1	9.18845449	7.0	83.30628276	7.0	-83.30628276	535.299	19.0
AIR2	9.20281611	8.0	83.39905796	7.0	-83.39905796	505.878	19.0
ALEGRE	9.01333171	3.0	83.13224478	4.0	-83.13224478	334.342	22.0
ATE4	9.93321808	11.0	84.35853825	12.0	-84.35853825	443.338	34.0
BAGACES4	10.53303718	7.0	85.23798690	8.0	-85.23798690	107.920	21.0
BELLA	9.83162722	4.0	84.28698003	5.0	-84.28698003	802.293	29.0
BLANCA	9.60816907	6.0	85.14555858	7.0	-85.14555858	13.678	52.0
BOCA	10.52723992	5.0	84.47957630	6.0	-84.47957630	71.373	17.0
BOMBA	9.92087102	6.0	83.06087683	7.0	-83.06087683	29.940	19.0
BONIFACIO	9.78755804	5.0	82.91338293	5.0	-82.91338293	20.694	14.0
BUVIS	9.55405934	3.0	83.75658211	4.0	-83.75658211	3509.109	23.0
CAHUITA	9.73674989	11.0	82.85092794	12.0	-82.85092794	22.136	32.0
CAÑAS2	10.40794834	9.0	85.08539595	10.0	-85.08539595	101.770	26.0
CAÑO	10.89128035	8.0	84.78615898	10.0	-84.78615898	51.514	23.0
CAPULIN	10.62671788	8.0	85.45889900	10.0	-85.45889900	130.865	24.0
CARRILLO2	10.47348303	7.0	85.54500668	9.0	-85.54500668	25.310	21.0
CARRILLO4	10.41300164	6.0	85.60292571	8.0	-85.60292571	56.576	16.0
CECILIA	11.05868841	6.0	85.41300344	8.0	-85.41300344	347.583	18.0
CHILES	11.03231148	7.0	84.71137250	9.0	-84.71137250	49.813	44.0
CINCO	10.38346854	6.0	83.72053583	7.0	-83.72053583	62.572	17.0
COLES	9.74581362	5.0	84.62648856	5.0	-84.62648856	139.226	38.0
COOPE	10.72113376	10.0	84.39002201	11.0	-84.39002201	96.365	31.0
CRUCITAS	10.87668283	7.0	84.32906760	9.0	-84.32906760	83.464	41.0
CUCARACHA	10.62685021	7.0	84.78310516	9.0	-84.78310516	198.842	42.0
DOMINICAL2	9.29947681	3.0	83.86722876	3.0	-83.86722876	352.031	16.0
ESQUINAS	10.82178957	10.0	84.56600098	11.0	-84.56600098	82.553	26.0
ESTRELLA	9.79856869	29.0	83.96187974	39.0	-83.96187974	1939.566	106.0
ETCG	9.99948220	0.0	84.10589717	0.0	-84.10589717	1193.691	0.0
FORTUNA	10.46865321	11.0	84.65959494	14.0	-84.65959494	329.439	36.0
GARZA	9.91086807	9.0	85.64317211	11.0	-85.64317211	14.136	84.0

Ejemplo de tabla de puntos de bancos de nivel, con altura elipsoidal del IGN.

BN	NORTE	ESTE	ALTURA ELIPSOIDAL	ALTURA ORTOMETRICA	ORDEN	AÑO	TIPO	DESCRIPCION	PROVINCIA	CANTON	UBICACIÓN	DESCRITA POR	FUENTE
66	1105160.024	487184.743	1154.281	1135.921	1	2013	GEODESICO	DISCO DE 90CM EN ACERA DE CONCRETO	HEREDIA	HEREDIA	EN HEREDIA, LA MARCA SE ENCUENTRA COLOCADA EN EL EXTREMO ESTE DEL ANDÉN, EN EL EDIFICIO DE LA ESTACION DEL TREN	S. ROJAS, D. OVARES, A. CHAVARRIA	UNA-ETOS
374	1108036.359	486450.563	1191.583	1176.9034	1	2013	GEODESICO	DISCO DE 90CM EN GRADA DE CONCRETO	HEREDIA	BARVA	EN LA IGLESIA DE BARVA, EMPOTRADO EN LA PRIMERA GRADA DEL PEDESTAL "CRUZ DE LAS MISIONES"	S. ROJAS, D. OVARES, A. CHAVARRIA	UNA-ETOS
375-A	1111191.427	485188.149	1291.508	1275.5313	1	2013	GEODESICO	DISCO DE 90CM EMPOTRADO EN HITO DE CONCRETO	HEREDIA	BARVA	DESDE LA IGLESIA DE BARVA, LA MARCA SE ENCUENTRA 3,7KM AL NORTE, POR CARRETERA DE ASFALTO HACIA VARA BLANCA, COLOCADO EN EXTREMO SUR DE BARABDA OESTE DEL PUENTE SOBRE QUEBRADA LA ESPERANZA	S. ROJAS, D. OVARES, A. CHAVARRIA	UNA-ETOS
376	1112126.504	484847.999	1334.414	1316.9001	1	2013	GEODESICO	DISCO DE 90CM EMPOTRADO EN PARAPETO ALCANTARILLA	HEREDIA	SANTA BARGARA	DESDE LA IGLESIA DE BARVA, LA MARCA SE ENCUENTRA 5,1KM AL NORTE, POR CARRETERA DE ASFALTO HACIA VARA BLANCA, COLOCADO EN PARAPETO NORTE DE ALCANTARILLA DE CAJÓN	S. ROJAS, D. OVARES, A. CHAVARRIA	UNA-ETOS
386	1123255.809	482915.507	1941.483	1928.9583	1	2013	GEODESICO	DISCO DE 90CM EMPOTRADO EN HITO DE CONCRETO	HEREDIA	HEREDIA	DESDE LA ESCUELA DE VARA BLANCA, LA MARCA SE ENCUENTRA A 2,3KM AL SUR, POR LA CARRETERA DE ASFALTO HACIA BARVA EN LA BIFURCACION DE CAMINOS DEL VOLCAN POAS, HEREDIA Y SARAPIQUI EMPOTRADO EN GRADA TELEFONICA PUBLICO	S. ROJAS, D. OVARES, A. CHAVARRIA	UNA-ETOS
577	1144525.631	481446.718	381.512	359.6698	1	2013	GEODESICO	DISCO DE 90CM EMPOTRADO EN HITO DE CONCRETO	ALAJUELA	ALAJUELA	DESDE LA IGLESIA DE SAN MIGUEL, LA MARCA SE ENCUENTRA A 4,7KM AL NORTE, POR LA CARRETERA DE ASFALTO HACIA LA VIRGEN, COLOCADO EN EL JARDIN DE LA CASA DEL SEÑOR JORGE ARRIETA.	S. ROJAS, D. OVARES, A. CHAVARRIA	UNA-ETOS
585	1105264.175	486623.641	141.095	140.014	1	2013	GEODESICO	DISCO DE 90CM EMPOTRADO EN HITO DE CONCRETO	HEREDIA	SARAPIQUI	DESDE LA ESCUELA DE LA VIRGEN 3,5 AL NORTE, POR LA CARRETERA DE ASFALTO HACIA PUERTO VIEJO, COLOCADA EN PROPIEDAD DEL SEÑOR RODRIGO RODRIGUEZ NUÑEZ	S. ROJAS, D. OVARES, A. CHAVARRIA	UNA-ETOS
798	1135357.779	479922.675	813.918	809.6933	1	2013	GEODESICO	ESPIGA DE 20CM EMPOTRADO EN EL ALETÓN DE PUENTE	ALAJUELA	ALAJUELA	DESDE LA IGLESIA DE SAN MIGUEL 7,2KM AL SUR, POR LA CARRETERA DE ASFALTO HACIA VARA BLANCA, EMPOTRADA EN EL ALETÓN SUR DEL PUENTE SOBRE EL RÍO CARBLANCO	S. ROJAS, D. OVARES, A. CHAVARRIA	UNA-ETOS
H-0	1105942.677	487191.823	1182.057	1167.1404	1	2013	GEODESICO	DISCO DE 90CM EN GRADA DE CONCRETO	HEREDIA	HEREDIA	EN LA COMANDANCIA DE HEREDIA, EMPOTRADA A NIVEL DE LA TERCERA GRADA AL LADO NORTE	S. ROJAS, D. OVARES, A. CHAVARRIA	UNA-ETOS
H-1	1108086.315	486434.086	1190.892	1176.173	1	2013	GEODESICO	DISCO DE 90CM EMPOTRADO EN HITO DE CONCRETO	HEREDIA	BARVA	EN LA IGLESIA DE BARVA, COLOCADO EN UNA ESQUINA NORESTE DEL JARDIN	S. ROJAS, D. OVARES, A. CHAVARRIA	UNA-ETOS