

**Universidad Nacional
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Escuela de Matemática**

***Perfil de los estudiantes de la carrera Bachillerato y
Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la
Universidad Nacional sobre los Conocimientos
tecnológicos, pedagógicos y del contenido función
cuadrática***

Trabajo Final de Graduación sometido a consideración de la Comisión de Trabajos Finales de Graduación de la Escuela de Matemática como requisito parcial para la presentación de Trabajo Final de Graduación para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática

Estudiantes: *Yerlin Chacón Camacho*
Wilbert Vargas Delgado

Comité Asesor: *M.Sc. Yuri Morales López, Tutor*
M.Sc. Ricardo Poveda Vásquez, Asesor
Dr. Miguel Picado Alfaro, Asesor

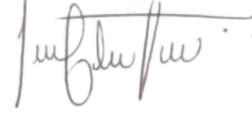
Campus Omar Dengo

Heredia, Costa Rica

Octubre, 2021

Este trabajo final de graduación ha sido aceptado y aprobado por el Tribunal Examinador de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, como requisito parcial para optar al grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática.

M.Sc. Jessenia Chavarría Vásquez



Representante del Decanato

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Dr. Cristian Alfaro Carvajal



Representante de la Dirección

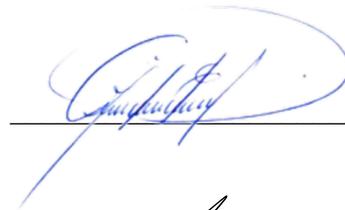
Escuela de Matemática

M.Sc. Yuri Morales López



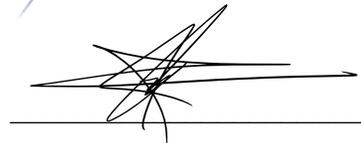
Tutor(a)

Dr. Miguel Picado Alfaro



Asesor(a)

M.Sc. Ricardo Poveda Vásquez



Asesor(a)

Bach. Yerlin Chacón Camacho



Estudiante

Bach. Wilbert Vargas Delgado



Estudiante

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por creer en mí siempre; en especial a mis padres que han sido mi mayor motivación, a mi hermana Diana por su apoyo incondicional, a mis profesores, compañeros y a la Universidad en general; por formarme en la amplitud de conocimientos, sobre una base de valores humanos. Con especial cariño doy gracias a Yuri Morales López por todo su compromiso y apoyo, quien constante y pacientemente nos orientó. A los lectores Ricardo Poveda y Miguel Picado por su tiempo y disposición. A mi compañero de Tesis por su comprensión y amistad durante todos los años de formación y por lograr que la construcción del trabajo se convirtiera en recuerdos agradables y felices.

Mi gratitud para con todos ellos que hicieron posible este logro.

Yerlin Chacón Camacho

Tabla de Contenido

Índice de figuras.....	V
Índice de tablas.....	VI
1. Capítulo I: Introducción.....	1
1.1. Justificación y planteamiento del problema.....	1
1.1.1. Justificación	1
1.1.2. Tema.....	4
1.1.3. Pregunta de Investigación	4
1.2. Objetivos	4
1.2.1. Objetivo General.....	4
1.2.2. Objetivos Específicos.....	4
1.3. Antecedentes	6
2. Capítulo II: Marco Teórico	9
2.1. La formación inicial de profesores de matemática	9
2.1.1. Tendencias de la formación de profesores.....	9
2.1.2. Formación de profesores por competencias.....	13
2.2. Los sistemas de organización de conocimiento en Educación Matemática.....	14
2.2.1. Fundamentación teórica para identificar los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido en la formación de profesores.....	16
2.3. Los conocimientos de los profesores en formación vinculados a la enseñanza de funciones	25
2.3.1. Enseñanza de las funciones.....	25
2.3.2. Uso de la tecnología en la enseñanza de funciones	31
3. Capítulo III: Marco Metodológico.....	34
3.1. Tipo de investigación.....	34
3.2. Participantes	34
3.3. Instrumentos de recolección de información	35
3.3.1. Metodología de la revisión bibliográfica	35
3.3.2. Cuestionario diagnóstico.....	36
3.3.3. Tarea matemática	36
3.5. Fases de la investigación.....	38
3.5.1. Fase 1: Revisión literaria y planteamiento del problema.....	38
3.5.2. Fase 2: Revisión literaria y construcción del Marco Teórico	38
3.5.3. Fase 3: Construcción, validación y aplicación de instrumentos de recolección de información	39

3.5.4.	Fase 4: Análisis de la información.....	42
3.5.5.	Esquema de las fases de la investigación.....	43
3.6.	Categorías de análisis.....	43
3.7.	Técnicas de análisis de la información	46
3.8.	Criterios de validez de los resultados.....	49
3.9.	Esquema metodológico.....	49
4.	Capítulo IV: Análisis	51
4.1.	Cuestionario diagnóstico.....	51
4.1.1.	Conocimiento tecnológico	51
4.1.2.	Conocimiento tecnológico pedagógico.....	52
4.1.3.	Conocimiento pedagógico de contenido sobre función cuadrática.....	53
4.1.4.	Conocimiento tecnológico sobre contenido sobre función cuadrática.....	54
4.1.5.	Conocimiento tecnológico pedagógico del contenido sobre función cuadrática.....	55
4.2.	Asignación de tareas matemáticas	56
4.2.1.	Conocimiento pedagógico.....	56
4.2.2.	Conocimiento del contenido sobre función cuadrática.....	58
4.2.3.	Conocimiento tecnológico pedagógico.....	59
4.2.4.	Conocimiento pedagógico del contenido sobre función cuadrática.....	61
4.2.5.	Conocimiento tecnológico del contenido sobre función cuadrática	65
4.2.6.	Conocimiento tecnológico pedagógico del contenido sobre función cuadrática.....	67
4.3.	Reflexión sobre el análisis de instrucciones	70
4.3.1.	Conocimiento tecnológico pedagógico.....	70
4.3.2.	Conocimiento tecnológico pedagógico del contenido sobre función cuadrática.....	72
5.	Capítulo V: Conclusiones, limitaciones y recomendaciones.....	74
5.1.	Conclusiones.....	74
5.2.	Limitaciones.....	80
5.3.	Recomendaciones.....	81
5.3.1.	A la Escuela de Matemática.....	81
5.3.2.	Para los estudiantes.....	81
5.3.3.	Para futuras investigaciones.....	82
6.	Referencias.....	84
7.	Anexos	97

Índice de figuras

<i>Figura 1.</i> El marco TPACK y sus componentes de conocimiento _____	20
<i>Figura 2.</i> Esquema de las fases de la investigación _____	43
<i>Figura 3.</i> Diagrama codificado de categorías y subcategorías de análisis _____	46
<i>Figura 4.</i> Esquema Metodológico _____	50
<i>Figura 5.</i> Herramientas tecnológicas adecuadas para la enseñanza de la función cuadrática _____	53
<i>Figura 6.</i> Participante 9; asignación de tareas matemáticas, ítem 12 _____	59
<i>Figura 7.</i> Participante 24; asignación de tareas matemáticas, ítem 12 _____	59
<i>Figura 8.</i> Participante 9; asignación de tareas matemáticas, ítem 15a. _____	60
<i>Figura 9.</i> Participante 24; asignación de tareas matemáticas, ítem 15a. _____	61
<i>Figura 10.</i> Participante 22; asignación de tareas matemática, ítem 15b. _____	69

Índice de tablas

<i>Tabla 1</i>	47
<i>Tabla 2</i>	47
<i>Tabla 3</i>	48
<i>Tabla 4</i>	51

1. Capítulo I: Introducción

1.1. Justificación y planteamiento del problema

1.1.1. Justificación

En la actualidad, las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) están presentes en muchos campos donde, tanto adultos como jóvenes, las utilizan de forma consciente e inconsciente dentro de su actividad cotidiana. En la Educación Matemática, el uso de las tecnologías puede ser un gran aliado, pero es vital comprender que por sí solas no logran un cambio significativo (Torres y Gilbert, 2010; Cabero y Marín, 2014). Para que exista un aprovechamiento y utilización adecuada de los recursos tecnológicos el docente de matemática¹ debe poseer competencias y conocimientos en pedagogía, contenido, enseñanza del contenido matemático y tecnología educativa, entre otros.

Ahora bien, tal como Shulman ha indicado (1986; 1987), el punto medular del proceso de enseñanza es comprender que el contenido (en este caso, la matemática) y su pedagogía son inseparables, y que los docentes deben tener un conocimiento especializado que va más allá de estas dos áreas del saber. En el caso de la Educación Matemática, el docente no solo sabrá matemática y pedagogía, sino la forma en cómo enseñar esta disciplina. El uso de los recursos tecnológicos es un elemento más en un entramado altamente complejo de planificación, de estimulación de capacidades y de ejecución de actividades profesionalmente sintonizadas. Se parte de la premisa de que, aun cuando un docente posea un amplio conocimiento en tecnologías, esto no lo faculta para lograr una integración correcta de las TIC dentro de la enseñanza de la matemática.

Por otro lado, la expansión del Internet y la creación de nuevas y mejores herramientas tecnológicas, amplían enormemente las posibilidades de su utilización en el proceso educativo. Como lo menciona la UNESCO (2012), inicialmente, la preocupación se reducía a la enseñanza de la matemática mediada por solo algunos instrumentos o herramientas tecnológicas, como software de geometría, hojas de cálculo y calculadoras. Sin embargo, actualmente por el gran desarrollo tecnológico se tiene a disposición una amplia gama de dispositivos, software y aplicaciones útiles para los procesos de enseñanza y

¹ De aquí en adelante, se utiliza esta connotación inclusiva del lenguaje. De ser necesario una distinción, se realizará de forma detallada, según corresponda su sexo.

aprendizaje; de esto sobresale la cuestión sobre su integración efectiva en los métodos de mediación de clase.

Estos dispositivos “han acercado las matemáticas escolares al mundo exterior al facilitar el procesamiento de datos más complejos y el manejo de problemas más realistas” [Traducción propia]² (UNESCO, 2012, p. 35). Así pues, es importante aprovechar las facilidades que brinda la tecnología dentro de la Educación Matemática. No obstante, existe la dificultad de que la mayoría de estos recursos tecnológicos no están creados específicamente para el abordaje de los contenidos matemáticos, provocando a menudo que la adaptación de estos al proceso sea complicada para los docentes y más aún para aquellos que no han sido capacitados para esto (UNESCO, 2012). Lo anterior, es reafirmado por Suárez-Rodríguez et al. (2012) quienes sugieren que hay poca integración entre las competencias tecnológicas y las pedagógicas de los profesores.

En Costa Rica, el sistema educativo de enseñanza también se ha visto influenciado por la tecnología, así se reconoce en el quinto informe del Programa Estado de la Nación (2015), donde se afirma que las tecnologías irrumpen en todos los ámbitos del quehacer humano y reconoce que esto genera grandes desafíos globales. En el informe se sugiere que la implementación de la tecnología en el sistema educativo debe estar dirigida al mejoramiento del proceso de enseñanza y aprendizaje, desarrollando las habilidades necesarias para la época y teniendo en cuenta la complejidad del proceso.

Según el Ministerio de Educación Pública (MEP) (2012), en los Programas de Estudio de Matemáticas se propone el uso inteligente de la tecnología de manera relevante y pertinente. Por lo que investigar sobre la posible integración tecnológica que realizan los docentes durante su formación es de suma importancia.

Respecto a la formación de docentes, McBroom (2011) afirma que los profesores tienden a enseñar de la misma forma en que fueron instruidos. Así pues, es importante considerar la incorporación de estrategias de enseñanza basadas en el uso de las tecnologías, ya que la exposición temprana a tales metodologías puede asegurar mayor facilidad a la hora de comenzar a utilizarlas en sus prácticas docentes.

² De aquí en adelante se utilizará asterisco (*) para denotar las traducciones propias de las personas autoras de esta tesis.

Respecto a la formación específica de profesores de matemática para educación secundaria, la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional (BLEM-2017) (UNA) ha implementado desde el año 2017 un plan de estudios con un enfoque por competencias. En este plan de formación, se considera que la tecnología en los distintos cursos puede ofrecer “el acercamiento a la resolución de problemas tanto de carácter matemático como pedagógico, y como plataforma para la integración entre la matemática y su didáctica.” (BLEM, 2017, p. 61). Asimismo, existe un curso específicamente destinado a formación de los estudiantes en algunos recursos tecnológicos apropiados para la enseñanza, donde se promueve el desarrollo de habilidades en el uso de las TIC (BLEM, 2017).

De esta manera, resulta relevante analizar si la formación de los docentes de matemática está respondiendo a las demandas nacionales e internacionales, y comprender si los esfuerzos realizados en las carreras de formación (específicamente en la UNA) están generando en los profesores de matemática en formación las capacidades para la eficiente integración de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Dentro de la literatura que se ha revisado para este estudio, hay poca evidencia de trabajos relacionados con el modelo Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK), en el tema de funciones. Según Ugalde (2014), las funciones son la herramienta por excelencia que utilizan todas las áreas de la matemática que buscan la modelación, cuantificación o descripción de fenómenos naturales o actividades cotidianas.

En este mismo sentido, Roumieu (2014) puntualiza que las funciones son utilizadas para describir y simular los procesos, geológicos, atmosféricos y biológicos. Por esta razón, es necesario que el docente de matemática conozca sobre el tema y tenga la capacidad de relacionar los elementos de la función en un contexto específico, para determinadas áreas del conocimiento.

Las funciones como contenido matemático permiten modelar situaciones de la vida real, y son herramientas muy útiles en Educación Matemática. La modelización desde la contextualización permite a estudiantes comprender los conceptos matemáticos desde situaciones diarias. El proceso de modelización matemática requiere que el docente conozca el contenido y tenga la habilidad de poder interpretar las situaciones.

Por consiguiente, es necesario que los docentes de matemática en formación comprendan la relevancia del contenido de funciones dentro de las mallas curriculares de la enseñanza media y universitaria, no solo porque es un contenido que se aborda en varios cursos de su formación profesional, sino también porque permite dotar a los profesores en formación de herramientas matemáticas para la modelización de situaciones concretas.

Lo anterior da paso a considerar útil, necesario e innovador desarrollar este trabajo en el contenido de funciones.

Ante lo expuesto, es indispensable cuestionarse sobre cuáles son los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido que manifiestan los profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional ante tareas del área de matemática en el tema de función cuadrática. Para profundizar sobre esto, se utiliza el modelo TPACK como sistema de organización de conocimientos.

1.1.2. Tema

Particularmente para esta investigación, se propone como tema de investigación el conocimiento tecnológico, pedagógico y de contenido que evidencian el profesorado de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional.

1.1.3. Pregunta de Investigación

¿Cuáles conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido manifiestan los profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional al ejecutar y analizar una tarea matemática del tema de función cuadrática?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Caracterizar los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y del contenido sobre función cuadrática que muestran los profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional, desde el estudio del modelo TPACK.

1.2.2. Objetivos Específicos

OE1. Indagar sobre los elementos que evidencian los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido de los profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional, al resolver una tarea matemática sobre función cuadrática.

- OE2.** Diseñar una tarea matemática sobre función cuadrática que integre los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido, utilizando el modelo TPACK, con el fin de aplicarla a los profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional, con el propósito de explorar estos conocimientos.
- OE3.** Describir los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y del contenido sobre función cuadrática que poseen los profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional, en el marco del modelo TPACK.

1.3. Antecedentes

En esta sección se presentan algunos resultados de investigaciones teóricas y experimentales relacionadas con la integración de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Primero, se muestra de manera global la importancia de su incorporación dentro de la mediación en las clases de matemática, y luego, se presentan investigaciones enfocadas en abordajes prácticos del modelo TPACK.

Dado el papel que ha llegado a jugar la tecnología en el proceso de enseñanza se han generado diferentes modelos y propuestas que intentan integrarla de manera eficiente en este proceso. Además de esto, una aplicación adecuada de las herramientas tecnológicas en la enseñanza va de la mano con las estrategias empleadas para su uso y de la forma en que se organizan para integrarlas al currículo (Torres y Glibert, 2010).

Ante este panorama educativo con tecnología, se realizan investigaciones que buscan comprender la manera de implementar eficazmente las TIC en el proceso de enseñanza desde la perspectiva de los conocimientos del docente, por ejemplo, desde del modelo TPACK. Cabero y Barroso (2016), aplicaron un instrumento, que permite examinar los conocimientos propuestos en el modelo indicado. Este se aplicó a personas relacionadas con educación y tecnología en universidades de distintos países. Los resultados muestran que los profesores del experimento tienen una alta percepción de sí mismos respecto a los conocimientos que propone el modelo TPACK, y que los provenientes de Universidades Latinoamericanas poseen mejor puntuación que los de Universidades Españolas, afirmando la importancia del contexto.

Otros trabajos han evaluado las capacidades y caracterización del nivel que poseen los docentes en la aplicación del TPACK, primero porque pueden generar algunas recomendaciones para la operacionalización del instrumento que se quiere aplicar en esta investigación y, de igual modo, porque da un acercamiento a la vivencia de aula con la utilización del modelo.

Por ejemplo, Cejas et al. (2016) se enfocan en caracterizar las habilidades tecnológicas de un profesor en formación inicial y lo plasman a través de ciertos indicadores. Muestran algunas de las principales competencias que debe desarrollar el profesorado universitario para poder abordar sus clases utilizando el modelo TPACK, pero desde un

enfoque por competencias. Además, realizan una lista de ciertas capacidades que se pueden ubicar en los dominios y subdominios del TPACK, así como ejemplos explícitos de estas competencias. Finalmente, concluyen que el modelo “permite formar a los estudiantes en el desarrollo de los entornos tecnológicos y a los propios profesores en la incorporación de las TIC en los procesos de enseñanza-aprendizaje” (Cejas et al., 2016, p. 116).

Otro elemento clave son las creencias que tienen los profesores de matemática sobre el TPACK. Kartal y Çinar (2018), seleccionaron seis profesores en formación inicial tomando en cuenta criterios como el nivel de conocimiento matemático y tecnológico. Estos seis profesores participaron en un curso tipo taller con trabajo de campo aplicando el modelo TPACK; fueron sometidos a una encuesta de autoevaluación acerca de su práctica integrando las TIC. Dentro del estudio se pudo observar que los participantes tenían creencias negativas al inicio, pero al recibir talleres y adquirir experiencia de campo estas parecieron cambiar. Por ejemplo, los profesores se dieron cuenta que el incluir las TIC fomentaba actitudes positivas hacia la matemática, y lograban aprendizajes significativos en los estudiantes. Se concluye en este estudio que, aunque inicialmente los docentes puedan tener creencias no favorables al uso de las tecnologías en las clases, con formación adecuada y experiencia en este campo se pueden realizar cambios sobre estas convicciones.

Por otra parte, McBroom (2011) realizó un estudio de caso que buscaba examinar los niveles de TPACK alcanzados por un profesor a través de la observación de diferentes lecciones mediadas con la utilización de GPS para enseñar geometría. Se utilizaron niveles de interiorización mensurables del modelo propuestos por Niess en 2013. La autora menciona que en el estudio solo se pudieron visualizar 3 de estos niveles (reconocimiento, aceptación y adaptación), y concluye que la integración de las tecnologías en un modelo particular de clase requiere de mucho tiempo para que se llegue a desarrollar de forma plena. Además, asegura que no se puede esperar que todas las lecciones se desarrollen con el mismo nivel de implementación tecnológica. Agrega que debe realizarse una ardua capacitación del docente para que pueda integrar las herramientas tecnológicas de manera efectiva y en el momento donde esta sea realmente útil.

McBroom (2013), en una investigación derivada de la anterior, realizó un estudio de caso, pero esta vez enfocado en la integración del software *Geometer's Sketchpad* en la

enseñanza de geometría de secundaria, utilizando el mismo modelo de desarrollo TPACK. Los resultados mostraron que se necesita un desarrollo profesional continuo para que los docentes adquieran y mejoren sus niveles de TPACK. Agrega que, por lo general, el docente utiliza la tecnología para la enseñanza dirigida por él mismo y no apuesta por un proceso de enseñanza centrado en el estudiante.

Tatar et al. (2018), desarrollaron un estudio de tres casos con el objetivo de medir los niveles TPACK de los profesores de matemática para integrar tecnologías en la enseñanza de sólidos usando el modelo dentro de las lecciones de secundaria. Por medio de la aplicación de entrevistas, se evidencia que los docentes piensan que tienen altos niveles de TPACK en su práctica, pero las revisiones de planes y las observaciones aseguran lo contrario. También afirman que los docentes reconocen que, en muchas ocasiones les cuesta relacionar la tecnología con el contenido matemático que se desarrolla. Por otro lado, recalcan la importancia de recolectar información de diferentes fuentes para poder identificar los niveles de desempeño TPACK. Finalmente, se conjetura que los docentes con mayor experiencia en uso de tecnologías en el aula tienen mayor conciencia del impacto que esto puede generar en sus experiencias de clase.

Los antecedentes dejan ver una necesidad en investigar sobre el modelo TPACK, específicamente en aspectos como: conocimientos de herramientas tecnológicas y las estrategias empleadas para su uso en la enseñanza, implantación y organización eficaz de la tecnología en educación, creencias positivas y negativas de los docentes sobre conocimiento TPACK y como las negativas pueden cambiar con experiencias de implementación. Es así necesario que los profesores en formación inicial tengan experiencias con este modelo para identificar sus habilidades y poder fomentar aspectos donde se observen algunas carencias.

2. Capítulo II: Marco Teórico

En este capítulo se resumen los distintos fundamentos sobre los cuales se sustenta esta investigación, que están relacionados con la formación inicial de profesores y algunos sistemas de organización del conocimiento del profesor de matemática. Además, se profundiza en los aspectos teóricos del modelo TPACK. Finalmente, se exponen algunos conceptos, estrategias metodológicas y limitaciones sobre la enseñanza de funciones, así como la formación de profesores concerniente a este tema, que proporcionan el acercamiento del estudio al campo de la educación matemática.

2.1. La formación inicial de profesores de matemática

A lo largo de los años se han desarrollado diversas formas de enfocar la formación de profesores con el fin de responder a las exigencias presentadas por la sociedad en ese momento histórico. Así, uno de los grandes retos en la formación docente en matemática es “que [el profesor] sea capaz de adaptarse a los cambios continuos, no a través del aprendizaje de recetas de cómo enseñar ciertos temas, sino mediante la reflexión en su quehacer” (Barrantes, 2003, p. 78).

2.1.1. Tendencias de la formación de profesores

Los modelos o tendencias de la formación de profesores se pueden comprender como un recurso con fundamentación científica, que dirigen las prácticas de instrucción docente con el objetivo de explicar y mejorar la realidad de la educación (Cáceres et al., 2003).

Paniagua (2013) afirma que la formación inicial de profesores es el proceso donde cada docente en formación “adquiere conocimientos mínimos básicos, desarrolla las destrezas y las habilidades fundamentales, a la vez que construye las actitudes necesarias” (p. 4), para desempeñar su labor docente de forma óptima, reconociendo estas destrezas y habilidades como conocimientos específicos y generales del contenido de una asignatura, así como de saberes pedagógicos y didácticos de la misma.

En el marco de la Educación Matemática, Rico (2015) señala que la formación de profesores de matemática es “el conjunto de actividades y tareas que utilizan ideas, conocimientos y modos de pensar y de representar sostenidos por nociones matemáticas” (p. 25).

Sin embargo, a través de los años la enseñanza de la matemática se ha visto como aquella "... que tenía por objeto la transmisión del saber matemático como cuerpo organizado de conocimientos, identificando el conocimiento y dominio de los conceptos y destrezas matemáticas con el desarrollo de las capacidades del pensamiento formal" (Azcárate, 1998, p. 130). Lo anterior describe una de las limitaciones en la formación de profesores de matemática, pues en muchos casos, no se le ha dado verdadero interés a que los futuros docentes desarrollen habilidades didácticas, que impliquen organizar, analizar y abordar contenidos matemáticos de una manera diferente a la tradicional.

Azcárate (1998), afirma que la formación inicial de profesores debe entenderse:

como un conocimiento profundo de carácter didáctico sobre el área que ha de impartir. Conocimiento que le permita dominar no solo los conceptos básicos y estructurales de su área, sino también los conceptos puentes con otras áreas y las prácticas sociales que sirven de referencia a dicha área (p. 135).

Además, en los procesos de formación de profesores, es importante tomar en cuenta "... el papel de los significados que las personas asocian a los sucesos de su mundo experiencial, junto con la forma en que se generan los procesos interpretativos en contextos particulares" (Llinares, 1995, p. 165). Lo anterior debido a que con esta premisa se facilita el aprendizaje significativo en los estudiantes.

Estas ideas de Azcárate y Llinares están basadas en el hecho de que la formación de profesores procure la integración de los distintos conocimientos que provean al individuo las capacidades para mediar dentro del ambiente del aula, en lugar de tener como objetivo la simple transmisión de saberes matemáticos concretos (Azcárate, 1998).

En el caso particular del plan de estudios de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática (BLEM) (2017), la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional considera el proceso de formación inicial como "la génesis de los conceptos matemáticos, su formalización y sus aplicaciones, mediante la estructuración de una mediación pedagógica en función del desarrollo cognitivo e integral de las personas..." (p. 53). Donde se incluye la importancia del desarrollo de habilidades que permitan integrar los conocimientos de contenido, pedagógicos y cognitivos.

Como se ha evidenciado en los párrafos anteriores, en la literatura se pueden encontrar múltiples concepciones sobre lo que se entiende como formación inicial de profesores. Ahora, es de interés, describir algunas de las diferentes tendencias que existen en la formación de docentes. En este trabajo se considera la tendencia centrada en el profesor, en el estudiante y en la práctica reflexiva.

a) Centrada en el docente: Se puede considerar como el modelo más antiguo y actualmente vigente dentro de la formación de profesores. Históricamente, su auge y consolidación se dio en las décadas de los sesenta y setenta. En este enfoque estipulado como clásico, el objetivo principal es mejorar las prácticas de cada profesor partiendo desde un punto de vista individual, donde lo anterior se refiere a la mejora de las competencias docentes del profesor en los diferentes contextos y contenidos, que se evidencian en la enseñanza de aula, el trabajo con distintos tamaños de grupos y evaluación de los estudiantes entre otras (Aramburuzabala et al., 2013).

Además, determina un acumulado de rasgos deseables en el ámbito profesional de la docencia, cuyo propósito es formar profesionales capaces de responder a las exigencias que les plantee cualquier situación académica (Cáceres et al., 2003).

b) Centrada en el estudiante: la investigación en el campo educativo es una de las fuentes primarias de información sobre el estado histórico de la educación. Así, durante las dos décadas siguientes del estallido del modelo concentrado en la figura docente, los investigadores observaron la necesidad de una transformación del modelo centrado en el profesor a un modelo de docencia centrado en el alumno y su aprendizaje.

De este modo, como aseguran, Aramburuzabala et al. (2013),

Se aprecia cómo va variando la perspectiva de los investigadores y se mueve desde el interés inicial por “lo que hace el profesor” a las temáticas centradas en la cuestión de “cómo aprenden los estudiantes”; y se advierte una preocupación creciente por el análisis de las relaciones e interacciones entre profesores y alumnos (p. 348).

Así pues, la comprensión de las relaciones que existen entre el profesor, el contexto y el estudiante, permiten crear modelos integrados acerca de la enseñanza y aprendizaje que guían, entre otras cosas, la creación de currículos para la formación docente.

c) *Centrada en la práctica reflexiva*: Cáceres et al. (2003) sostienen que para autorregular la enseñanza e innovar, en la construcción de nuevos conocimientos, la reflexión sobre la compleja práctica docente es un requerimiento fundamental. En consecuencia, la formación docente centrada en la práctica reflexiva tiene su apogeo en el estudio de las situaciones reales vividas por los profesores. Es decir, que emplea la práctica reflexiva para desarrollar competencias y soslayar la mera reproducción de prácticas docentes. (Aramburuzabala et al., 2013).

Por otro lado, como se mencionó en la justificación, los docentes tienen una gran propensión a enseñar de la misma forma en que fueron instruidos en su formación inicial; por consiguiente, es relevante conocer cuáles son las tendencias que actualmente se desarrollan en la enseñanza de la matemática. A continuación, se describen algunas de las tendencias utilizadas en la Educación Matemática que podrían estar presentes en los currículos de las carreras de formación de profesores de matemática.

Respecto a los contenidos, Breda et al. (2015) afirman que “hay una tendencia a incorporar nuevos contenidos de geometría, estadística y probabilidad y matemáticas discreta” (p. 139). A partir de esto, se puede deducir que lo deseado al incluir o retomar estos temas es mostrar a los estudiantes la matemática desde una perspectiva cercana a ellos. Es decir, realizando una contextualización activa de los contenidos matemáticos.

Otra tendencia emergente en la enseñanza de la matemática es *la presentación de matemáticas contextualizadas*, en la que según Font (2008) se pretende “presentar una situación de contexto extra matemático que sea entendida por el alumno como un caso particular de un objeto matemático” (p. 26). En esta tendencia, lo particular es entendido como extra-matemático y el contenido general como un objeto matemático. Sin embargo, esta situación puede generar que la formalidad y rigor matemático se pierdan, por considerar tanto la matemática como su enseñanza desde una concepción completamente empírica. Además, el docente requiere saber cuáles son las aplicaciones de los contenidos matemáticos

a la cotidianidad, así como aquellos problemas que originaron los objetos matemáticos a estudiar (Font, 2008).

Con el fin de subsanar la problemática expuesta en el párrafo anterior, desde la educación matemáticas se ha desarrollado la *tendencia a dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos*. Como menciona Font (2008) "... ya no se considera que la enseñanza sea una mera transferencia de contenidos" (p. 30), sino que se debe hacer énfasis en los procesos de resolución de problemas y modelización, que propician los pensamientos propios de la matemática.

Por último, en la *tendencia a la incorporación de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)* el papel docente es fundamental. El uso de estos recursos depende enteramente de las capacidades del docente para adaptarlas a problemas y contextos educativos, con el fin de favorecer las características cognitivas y sociales de los estudiantes (Cabero et al., 2014). Debido a esto, es clave que en la formación inicial de profesores se incorporen elementos curriculares que desarrollen competencias digitales en los futuros docentes.

2.1.2. Formación de profesores por competencias

Un elemento de interés para este trabajo es la formación de profesores basada u orientada por competencias. Según Godino et al. (2012), ser competente es, en esencia, "la capacidad de afrontar un problema complejo, o de resolver una actividad compleja" (p. 2).

Dentro de los programas de formación docente de este tipo se debe contemplar mecanismos para asegurar que, efectivamente, los docentes están construyendo tales competencias. Para esto, tal como indican Font et al. (2018), existe una "necesidad de contar con un modelo de conocimientos del profesor para poder evaluar y desarrollar sus competencias" (p. 62). En el caso del profesor de matemática, este modelo debe desarrollar en los docentes las competencias para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje propios de la disciplina, así como capacitarlos para realizar una selección adecuada de los conocimientos didácticos, con el fin de mejorar el diseño, implementación y evaluación de la práctica docente (Godino et al., 2012). Además, se debe tener en cuenta "que la competencia reflexiva del profesorado de matemática en formación inicial debe ser desarrollada y evaluada por sus formadores" (Seckel y Font, 2020, p. 140), ya que este

proceso puede disminuir la rutina y aumentar la previsión en los procesos de enseñanza (Dewey, 1910).

Junto a lo anterior, en la formación de profesores mediante un enfoque por competencias es fundamental desarrollar el hábito de actualizarse permanentemente, con el fin de cumplir con su labor profesional (Pavié, 2011). Esto coincide con lo propuesto por la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional en el BLEM (2017), donde se afirma que los profesores, por medio de la actualización, pueden generar propuestas novedosas en su quehacer docente.

El programa que está involucrado en esta investigación BLEM 2017, se fundamenta en un enfoque curricular por competencias, el cual tiene como objetivo principal “formar profesores de Matemática con conocimientos matemáticos, pedagógicos y didáctico-matemáticos sólidos, con actitudes y habilidades que permitan mejorar la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina, en ámbitos como la educación secundaria” (p. 69).

De esta forma, el estudio se realiza atendiendo lo expuesto en los párrafos anteriores, es decir, se propicia que los docentes en formación afronten situaciones complejas donde evidencien sus conocimientos didácticos y su actualización constante, permitiendo así evaluar estas habilidades desde la formación inicial como lo indica Seckel y Font (2020). Este trabajo solicita a los futuros docentes la creación y reflexión de actividades dirigidas a estudiantes de secundaria, esto con el fin de analizar las competencias deseadas por la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional en el BLEM (2017).

2.2. Los sistemas de organización de conocimiento en Educación Matemática

Desde hace ya varias décadas se han realizado esfuerzos para mejorar el proceso educativo, diversas investigaciones se han interesado en analizar los conocimientos necesarios para la enseñanza de la matemática, en esta labor sobresalen algunos autores que han realizado valiosas contribuciones. A continuación, se presentan algunos aportes al sistema educativo realizados por Shulman Lee, que constituyen las bases en que se fundamenta el modelo TPACK. Complementariamente, se realiza una breve descripción sobre algunos sistemas de conocimiento basados en las ideas de Shulman.

Aportes teóricos de Shulman sobre los sistemas de conocimiento en Educación Matemática

Shulman (1986) plantea interrogantes acerca del conocimiento del profesor y la necesidad de indagar sobre los conocimientos que este posee; anterior a esto, en las investigaciones no se tomó en cuenta si una determinada forma de abordar los contenidos tiene relación con lo que aprenden e interpretan los alumnos y cómo los conocimientos del profesor sobre el contenido se convierten en conocimientos de instrucción, así, este autor decidió iniciar con investigaciones al respecto. Sus aportes se dirigen a que se organicen los conocimientos del profesor en categorías y establece tres tipos de conocimiento docente: el propositivo (o enunciativo), el casuístico y el estratégico (Shulman, 1986, 1987).

Este autor describe el *conocimiento propositivo* como aquel generado por la investigación, la experiencia práctica y el razonamiento moral. El *conocimiento casuístico* consiste en conocer sucesos, siendo descritos con aspectos específicos y muy detallados. El *conocimiento estratégico* ocurre cuando el profesor se enfrenta a situaciones en donde no hay respuesta teórica y debe resolverlo utilizando análisis y criterio profesional (Shulman, 1986). Considera dichos conocimientos indispensables en la praxis docente para lograr un buen proceso de enseñanza y aprendizaje, también propone que es preciso inculcarlos en aquellos que están aprendiendo a enseñar.

Además, plantea las siguientes categorías del conocimiento del profesor: a) Conocimiento del contenido, b) Conocimiento didáctico general, c) Conocimiento del currículo, d) Conocimiento didáctico del contenido, e) Conocimiento de los alumnos y de sus características, g) Conocimiento de los contextos educativos y h) Conocimiento de los objetivos (Shulman, 1987).

El profesor tiene que evaluar y especular sobre los objetivos, materias que enseña y sus procesos didácticos, incluso debe comprender las definiciones y relacionar el conocimiento con otras materias (Shulman, 1986; 1987). El profesional debe saber desempeñarse con destreza, dominando los contenidos, procedimientos y fundamentos lógicos. También, este debe ser capaz de explicar el porqué de sus acciones, y señala que un verdadero profesional debe comprender y reflexionar sobre su oficio (Shulman, 1986).

En sus aportes, Shulman (1986), sugiere que los profesionales en docencia deben conocer sobre el contenido y el proceso, específicamente deben poseer conocimiento sobre las estructuras de la materia, conocimiento pedagógico y especializado de los programas de estudio.

Shulman (1986; 1987) considera el conocimiento del contenido (CK) como todos los saberes del docente sobre una disciplina, junto con la capacidad de organizar cada tema perteneciente a la asignatura. Enfatiza que el profesor debe mostrar a los estudiantes que puede decirse respecto de algún contenido y que no se puede, también saber justificar y explicar los enunciados, además de relacionarlo con otros.

Respecto al conocimiento pedagógico (PK), Shulman (1986) señala que el profesor debe conocer los conceptos errados que poseen los estudiantes y la forma en la que estas equivocaciones influyen en el aprendizaje.

Este autor indica que existe el conocimiento pedagógico del contenido (PCK), donde hace referencia a que el “contenido y pedagogía forman parte de un cuerpo inseparable de saber y entender” (Shulman, 1986, p. 6). Este nuevo saber representa la integración entre los conocimientos de contenido y los pedagógicos, donde el docente identifica la mejor forma de abordar un contenido, además de poder adaptar, organizar y representar los temas para que los estudiantes aprendan. También, es conveniente que comprenda cuáles son las dificultades que se presentan al enseñar temas específicos y las acciones que permiten atender dichos problemas.

2.2.1. Fundamentación teórica para identificar los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido en la formación de profesores.

Existen distintos tipos de sistemas de conocimientos como el Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, desarrollado en trabajos de Ball et al. (2008) y de Hill et al. (2008), y el Conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK) desarrollado por Carrillo et al. (2013), entre otros. El modelo Tecnological Pedagogical Content Knowledge (TPACK), conocido en sus inicios como el modelo TPCK, surge como respuesta a la falta de un fundamento teórico para la investigación en el área de tecnología educativa (Mishra y Koehler, 2006).

Este modelo tiene como principal objetivo comprender y describir los tipos de conocimiento necesarios de un profesor para su práctica pedagógica mediante el uso de tecnologías. Este arquetipo fue propuesto por Punya Mishra y Matthew Koehler, en el año 2006. Se construye sobre la línea de pensamiento que asegura que “[...] la enseñanza es una actividad compleja que se basa en muchos tipos de conocimiento” (Mishra y Koehler, 2006, p. 1020)*.

Este arquetipo tiene sus principales fundamentos teóricos en los trabajos de Shulman (1986, 1987), donde se introdujo la idea del PCK. Luego, con la incorporación de las tecnologías en la educación surge la idea de que los conocimientos sobre pedagogía, contenido y tecnología están vinculados entre sí, pues “estas nuevas tecnologías han cambiado la naturaleza de la clase o tienen el potencial para hacerlo” (Mishra y Koehler, 2006, p. 1023). Desde este tipo de enfoque, el conocimiento tecnológico se convierte en parte importante de lo que el docente debe saber. Es necesario enfatizar en el hecho de que no se debe entender el conocimiento tecnológico como algo apartado de los conocimientos pedagógicos y de contenido (Mishra y Koehler, 2006), pues se incidiría en el mismo problema que describe Shulman en los trabajos anteriormente mencionados.

El modelo considera como bases o dominios principales al conocimiento pedagógico (PK), conocimiento de contenido (CK) y al conocimiento tecnológico (TK), pero además contempla las relaciones o interacciones que existen entre ellos; de acuerdo con Mishra y Koehler (2006), “nuestro modelo de integración de tecnología en la enseñanza y el aprendizaje sostiene que desarrollar un buen contenido requiere un entrettejido cuidadoso de las tres fuentes clave de conocimiento: tecnología, pedagogía y contenido” (p. 1029) *. Estas relaciones dan origen al conocimiento tecnológico pedagógico (TPK), conocimiento pedagógico de contenido (PCK) y conocimiento tecnológico de contenido (TCK), de donde finalmente se obtiene el conocimiento tecnológico pedagógico del contenido (TPACK). Todos los anteriores se describen a continuación.

Conocimiento de contenido (CK):

El conocimiento de contenido es el que debe tener el profesor sobre los temas que va a enseñar, incluye conocimiento de conceptos y teorías. Además, debe comprender la

materia, saber diferentes explicaciones y brindar las ideas que evidencian la prueba del conocimiento (Mishra y Koehler, 2006).

Conocimiento pedagógico (PK):

Este es el conocimiento sobre los procesos y prácticas necesarios para una adecuada enseñanza y aprendizaje. Este conocimiento contempla el manejo del aula, planificación de la clase, desarrollo de las lecciones y evaluación del aprendizaje, también abarca métodos para el desarrollo de la clase, estrategias de evaluación, para así cumplir con los objetivos del proceso de enseñanza (Mishra y Koehler, 2006). Además, el profesor debe comprender cómo los estudiantes aprenden, desarrollan las habilidades deseadas y debe planificar la clase de manera que se desarrolle de forma natural.

Conocimiento tecnológico (TK):

Se refiere a las tecnologías desde las más comunes en el proceso de enseñanza hasta las tecnologías digitales; este conocimiento contempla las habilidades para operar estas tecnologías, conocimiento de hardware y software, además incluye la habilidad de instalar, utilizar y eliminar programas (Mishra y Koehler, 2006). Es necesario el desarrollo de estas habilidades ya que las tecnologías cambian rápidamente y son necesarias para poder adaptarse.

Conocimiento tecnológico pedagógico (TPK):

Este conocimiento surge al realizar las actividades pedagógicas utilizando herramientas tecnológicas. Incluye saber cómo la enseñanza puede cambiar al utilizar tecnología, también encierra conocer variedad de herramientas tecnológicas que puedan ayudar en un determinado tema y saber elegir la herramienta apropiada para desarrollarlo. Además, conocer estrategias metodológicas para poder abordar contenidos mediante el uso de la tecnología (Mishra y Koehler, 2006). Por lo tanto, es el conocimiento de 1) actividades pedagógicas utilizando las TIC, 2) cómo las tecnologías pueden ser utilizadas en la enseñanza y 3) la comprensión de que el uso de estas puede cambiar el proceso de enseñanza.

Conocimiento pedagógico de contenido (PCK):

Según Mishra y Koehler (2006), este conocimiento incluye el saber pedagógico de enseñar un contenido, cuál enfoque de enseñanza es mejor para cada tema, así como

modificar los elementos del contenido para mejorar la enseñanza. También, los autores afirman que el “PCK se ocupa de la representación y formulación de conceptos, técnicas pedagógicas, conocimiento de lo que hace que los conceptos sean difíciles o fáciles de aprender, conocimiento de los conocimientos previos de los estudiantes y teorías de la epistemología” (Mishra y Koehler, 2006, p. 1027)*. Así, un profesor con PCK desarrollado y conociendo las características de sus estudiantes sabe cómo emplear actividades en cada contenido para poder ayudar en el aprendizaje de estos. Este conocimiento permite conocer los errores que los alumnos suelen tener en cada tema y de qué manera se pueden corregir.

Conocimiento tecnológico de contenido (TCK):

Según Mishra y Koehler (2006), el TCK se refiere a la relación entre el contenido y la tecnología, es el conocimiento que utiliza la tecnología para representar los contenidos. Saber los contenidos que se enseña es necesario, pero se debe entender cómo al utilizar la tecnología se puede mejorar la comprensión sobre la materia. Este conocimiento se refiere a favorecer distintas formas de representación del contenido por medio de la tecnología, de tal forma que:

La comprensión de estas representaciones existe independiente del conocimiento acerca de su uso en un contexto pedagógico, en la medida en que las tecnologías utilizadas en las representaciones se convierten en la corriente principal, que transforma este en el conocimiento del contenido (Cabero et al., 2015, p. 14).

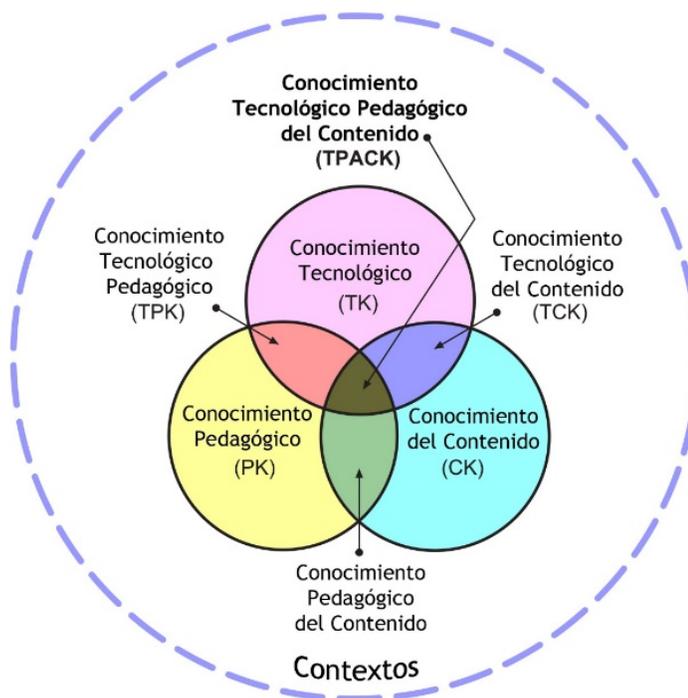
Conocimiento tecnológico pedagógico de contenido (TPACK):

Para Mishra y Koehler (2006), el conocimiento TPACK es una forma de saber que surge de todas las relaciones anteriores y que tienen más alcance que los tres conocimientos básicos. Los autores afirman que el TPACK incluye saber “... técnicas pedagógicas que utilizan tecnologías de manera constructiva para enseñar contenidos; lo que hace que los conceptos sean difíciles o fáciles de aprender y cómo la tecnología puede ayudar a corregir algunos de los problemas que enfrentan los estudiantes” (Mishra y Koehler, 2006, p. 1029)*; los autores agregan que este subdominio envuelve saber cómo se puede utilizar las tecnologías en métodos constructivistas de enseñanza.

Es importante recalcar que cualquier cambio ocurrido en uno de los dominios o subdominios del modelo, debe ser nivelado por un cambio en el resto de ellos, debido a que todos los elementos del modelo se encuentran en un equilibrio dinámico de tensión esencial (Mishra y Koehler, 2006). Por esto, Arévalo-Duarte et al. (2019), advierten que “una visualización aislada de cualquiera de los dominios representa un verdadero perjuicio para la buena enseñanza” (p. 9). Ver figura 1.

Figura 1

El marco TPACK y sus componentes de conocimiento



Nota. Esta figura es tomada de Koehler y Mishra (2009).

El modelo TPACK pretende integrar tres tipos de conocimiento que normalmente son incluidos en las tendencias de formación docente. La introducción de este modelo representa un desafío para las instituciones destinadas a esta labor, pues deben incluir en el proceso de formación espacios en los que se concientice a los futuros docentes sobre la importancia de las intervenciones que fomenten la apropiación de recursos tecnológicos y, con diferentes metodologías de trabajo se puedan explorar rutas distintas a las tradicionales.

De este modo, como menciona Salas-Rueda (2018), “el modelo TPACK es una alternativa pedagógica y tecnológica que las instituciones educativas junto con los maestros deben considerar durante la planificación y organización de las materias con la finalidad de mejorar la enseñanza y el aprendizaje” (p. 22).

El modelo TPACK podría ser una herramienta poderosa para la educación que, aplicada en la planificación y ejecución de tareas matemáticas tendría la capacidad para generar un impacto en la metodología de las clases, así como en la percepción que se tiene de la materia. Sin embargo, tal como indica Belfiori (2014),

La tecnología no es un condimento mágico que soluciona los problemas de aprendizaje ni que debe ser el centro de la clase, sino que es una herramienta más que se debe analizar en qué momento, para qué propósito y de qué manera incluirla (p. 1736).

Desde este punto de vista, para integrar las TIC en las clases de matemática no basta solo con conocerlas; también, se debe reorganizar las prácticas pedagógicas y disciplinares para que exista la interacción e integración de los tres conocimientos.

2.2.1.1. Enfoques, indicadores e instrumentos utilizados en la investigación y literatura internacional sobre el modelo TPACK.

El modelo TPACK ha sido utilizado en investigaciones educativas de diversos contextos. A continuación, se resumen algunas de las investigaciones de mayor relevancia para este trabajo.

Önal (2016), realiza una investigación en la que planificó una escala de tipo *Likert* de TPACK, en la cual cada enunciado responde a uno de los componentes del modelo. El instrumento está compuesto por 70 ítems que fueron creados por medio de la revisión literaria y basándose en instrumentos ya existentes. Este fue aplicado a una muestra escogida a conveniencia formada por 353 estudiantes que cursan el cuarto nivel de Educación Matemática en siete universidades de Turquía. El principal resultado se refiere al TPK, pues se mostró que este dominio del modelo se divide en dos factores, el conocimiento pedagógico tecnológico en línea y fuera de línea, entendiendo este último como los procesos de planear, predecir y evaluar el uso de la tecnología con fines educativos. Este resultado puede ser

considerado para la construcción de instrumentos que pretendan analizar el conocimiento TPK (Önal, 2016).

Por otro lado, medir el TPACK ha sido un proceso complicado de abordar; Koehler, Shin y Mishra, realizaron una revisión literaria de diversas investigaciones que incluyeran técnicas para medirlo. Después de esta revisión crearon una lista maestra con 303 artículos referidos al TPACK, de los cuales fueron escogidos 66 por medio de ciertos criterios de inclusión definidos previamente. Cerca de la mitad de los artículos escogidos utilizaron la observación como una herramienta para medir el TPACK. Además, los investigadores descubrieron que las técnicas: medidas de autoinforme, evaluaciones de desempeño, entrevistas y observaciones, estaban igualmente representadas en la muestra elegida. La técnica de entrevista abierta es la menos utilizada, pues realizar el análisis de la información recogida de esta manera es un proceso más complicado. En los resultados, los autores hacen énfasis en que la mayoría de los trabajos que utilizaron solamente observación y entrevistas no presentaron pruebas contundentes sobre la validez del instrumento (independientemente del enfoque de investigación) (Koehler et al., 2012).

En el año 2005, los autores Koehler y Mishra, administraron una encuesta con el fin de evaluar la evolución del aprendizaje, así como la percepción de los estudiantes y profesores sobre el conocimiento teórico-práctico de la tecnología y el contenido de un curso. Además, pretendieron conocer la apreciación sobre las dinámicas de grupo y el crecimiento del TPACK. La muestra fue de cuatro profesores y trece estudiantes, los datos se obtuvieron mediante la aplicación de encuestas, cuatro veces durante el curso; cada encuesta contaba con 35 ítems. Uno de los principales resultados se basa en el diseño de un curso en línea que permite a los estudiantes y profesores explorar las relaciones entre tecnología, pedagogía y contenido. Además, se evidencia que los profesores son capaces del desarrollo correcto de ciertas habilidades tecnológicas. Los autores subrayan que, los estudiantes y profesores pasaron de considerar la tecnología, la pedagogía y el contenido como constructos independientes a pensar en una construcción codependiente basada en la integración de la tecnología (Koehler y Mishra, 2005).

En esta misma línea, Anderson et al. (2013) realizaron una investigación basada en un estudio de caso, en el que se entrevistaron varios profesores de distintas disciplinas sobre

su práctica como facilitadores de un curso en línea. La muestra fue de 50 profesores de distintas áreas escogidos de forma intencional. La recolección de datos se realizó por medio de entrevistas semiestructuradas, en las cuales se refleja que, sin importar la disciplina, los profesores poseen conocimientos básicos sobre los dominios principales del TPACK. Además, hay evidencia de que los profesores de la muestra toman con especial atención el TK, debido a que, hacen referencia a lo inadecuado de separar los problemas tecnológicos de los problemas pedagógicos. Asimismo, los autores afirman que gracias a este modelo es posible analizar la presencia de diversos tipos de conocimiento docente, reflejados en sus opiniones y prácticas.

Schmidt et al. (2009), realizaron un estudio con el propósito de crear y validar un instrumento compuesto por 75 ítems para medir, mediante una escala *Likert*, la autoevaluación que hacen los profesores de matemática en formación sobre su TPACK. La encuesta se aplicó a 124 futuros profesores matriculados en el curso introducción a la tecnología educativa en la Universidad de Midwestern. Dentro del análisis de los datos se utilizaron métodos cuantitativos con el fin de verificar la validez y confiabilidad de la encuesta. Los autores mencionan como conclusiones que la creación y validación de este instrumento permite desarrollar un estudio longitudinal con la muestra escogida. Es decir, darle seguimiento a este estudio aplicando otras técnicas de investigación como la observación de estos profesores en sus clases, para ver si los resultados obtenidos con la aplicación de la encuesta pueden predecir los comportamientos del profesor en el aula. También, agregan que el instrumento puede servir como base para nuevas investigaciones con otros enfoques.

En Singapore, Koh et al. (2010) realizaron un estudio con el objetivo de examinar el perfil de los profesores en formación inicial respecto a sus conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido. Para la recolección de datos se aplicó una encuesta conformada por 29 preguntas a 1185 profesores en formación de diferentes disciplinas con preguntas basadas en el instrumento propuesto por Schmidt et al. (2009) anteriormente mencionado. Entre sus resultados, se encontró que los participantes perciben gran diferencia entre enseñar con tecnologías y sin ellas, aunque no pudieron distinguir qué factores eran los que tenían injerencia directa sobre esta percepción. Además, se señala que los futuros profesores masculinos puntuaron significativamente más alto en el conocimiento tecnológico que las

mujeres (no se encontró una razón significativa para este fenómeno). También, se hizo evidente que los individuos del estudio, por su condición de novatos, eran menos capaces de considerar los vínculos entre el contenido y la pedagogía, en comparación con profesores expertos.

Arévalo-Duarte et al. (2019), realizaron una investigación con el objetivo de conocer las percepciones de los estudiantes frente a las competencias que presentan los profesores de matemática en los dominios básicos del TPACK. Para ello, se eligió una muestra representativa de 572 estudiantes de diferentes carreras de la Universidad de Cúcuta, Colombia. Se aplicó un cuestionario que fue modificado del propuesto por Schmidt et al. (2009). Entre los resultados se menciona que los estudiantes perciben que su profesor de matemática tiene un mayor dominio del conocimiento disciplinar, seguido del pedagógico y señalan el conocimiento tecnológico como el más débil. Respecto a las debilidades mencionadas, las más importantes hacen referencia al PK y TK, donde los estudiantes perciben que sus profesores tienen dificultades para: mantener la organización y la dinámica del aula, y reconocer diferentes estilos de aprendizaje para adaptarlos a su práctica. En general, los estudiantes cuestionan las competencias de sus profesores para usar diferentes tipos de tecnología en el contexto del aula (Arévalo-Duarte et al., 2019).

Por su parte, Kirikçilar y Yildiz (2018), observaron a maestros de matemática de la escuela intermedia cuando diseñaban actividades en el aula utilizando GeoGebra enmarcados en el modelo TPACK. La recolección de datos se realizó por medio de observación y entrevistas semiestructuradas con las que lograron detectar que, aunque los docentes se actualicen sobre el uso de GeoGebra, presentan dificultades para diseñar actividades contextualizadas utilizando este programa. A pesar de esto, con la ayuda de este software, los estudiantes lograron comprender conceptos abstractos, pues les facilita una idea visual de lo que se estudia. Los datos recolectados con las entrevistas sugieren que los maestros deseaban diseñar actividades que mejoren el pensamiento matemático, pero estos no poseen el conocimiento necesario para integrar la tecnología y los contenidos matemáticos.

Los estudios realizados por Schmidt et al. (2009); Kirikçilar y Yildiz (2018) y Arévalo-Duarte et al. (2019) aportan instrumentos específicos para medir los conocimientos

del modelo TPACK. Por consiguiente, serán de utilidad para definir las unidades de análisis de estudio, que se abarcan en el marco metodológico de esta investigación.

2.3. Los conocimientos de los profesores en formación vinculados a la enseñanza de funciones

En esta sección se abordan aspectos importantes en relación con la enseñanza de funciones y la formación de profesores. Se inicia desarrollando aspectos generales sobre este tema, luego se hace énfasis en la enseñanza de la función cuadrática y se finaliza analizando el uso de la tecnología en la enseñanza de este contenido.

2.3.1. Enseñanza de las funciones

El concepto de función está presente en diversas áreas de la matemática y es una herramienta que permite modelar o describir situaciones cotidianas. Este puede ser considerado un concepto general, sin embargo, en el proceso de enseñanza no se debe abordar tan solo como un ente abstracto, sino teniendo en cuenta que el origen de este contenido fue precisamente la necesidad de comprender fenómenos naturales y situaciones de la cotidianidad (Ugalde, 2014). Históricamente el concepto de función ha sido modificado por distintos matemáticos, el primero en construir una definición satisfactoria de este concepto fue Gustav Dirichlet en el año 1837 (Ugalde, 2014).

La manera de definir la función depende del nivel educativo al que se dirige y está ligado al conocimiento del contenido de funciones que posee el docente. En la literatura se pueden encontrar algunas definiciones del concepto de función, por ejemplo, se define como conjunto:

“Sean A y B conjuntos. Una **función** $f : A \rightarrow B$ de A en B es un subconjunto f de $A \times B$ tal que:

- a) para todo elemento a en A existe un elemento b en B con (a, b) en f ; y
- b) si (a, b) y (a, b') son elementos de f , entonces $b = b'$ ” (Ugalde, 2014, p. 16).

También, se define como relación de la siguiente manera (Dieudonné citado en Medvedev, 2012),

Sean X y Y dos conjuntos, $R(x, y)$ una relación entre $x \in X$ y $y \in Y$. Se dice que R es *funcional* en y si para cada $x \in X$ existe uno y solo un $y \in Y$,

de manera que $R(x, y)$ es cierto. La gráfica de dicha relación se denomina *gráfica funcional* en $X \times Y$. Tal subconjunto F de $X \times Y$ se caracteriza por el hecho de que, para cada $x \in X$, hay uno y solo un $y \in Y$ de manera que $(x, y) \in F$; este elemento y se denomina valor de F en x y se denota con el símbolo $F(x)$. Un gráfico funcional en $X \times Y$ también se denomina *mapeo* de X en Y o una función definida en X y asumiendo valores en Y . (p. 25)*

Por el nivel educativo al que se dirige el estudio los investigadores adoptan la definición mencionada en los párrafos anteriores por Ugalde (2014).

2.3.1.1. Representaciones semióticas de la función

En este apartado se presentan algunos aspectos teóricos importantes para ampliar la comprensión del conocimiento sobre funciones. Conocer las distintas representaciones del concepto de función (representaciones semióticas) permite caracterizar el conocimiento desde los procesos más elementales hasta los más abstractos ya que, se pone en manifiesto las relaciones entre distintas representaciones y el significado de los conceptos matemáticos.

Las representaciones generalmente se denotan como una combinación de los componentes: símbolos escritos, objetos reales e imágenes mentales, y se utiliza el lenguaje para expresar la conexión entre dichas componentes (Cuesta, 2007). Estas representaciones son interpretadas según el contexto al que pertenecen y la red semántica involucrada (Guzmán, 1998). Así, los registros son “medios de expresión y de representación caracterizados precisamente por sus respectivos sistemas semióticos” (Guzmán, 1998, p. 2).

Duval (1993) define una representación semiótica como “producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento” (p. 39)*.

Duval (2004) (citado en Prada-Núñez, et al., 2017) afirma que, al menos, hay dos características de la acción cognitiva presentes en el desarrollo de habilidades matemáticas: utilizar diversos registros de representación semiótica y no siempre los objetos matemáticos son accesibles mediante la visualización.

Desde esta perspectiva, las representaciones semióticas de un objeto o concepto

matemático son totalmente necesarias pues, en general muchos de los objetos matemáticos no son accesibles a una idea visual o de otro tipo que facilite su comprensión (Duval, 1993).

Así es evidente la importancia de comprender que las representaciones semióticas son significativas para el desarrollo de habilidades mentales y nuevos conocimientos ya que, en ocasiones, los objetos matemáticos son comprendidos de mejor manera al analizar sus representaciones semióticas.

Por otro lado, la transformación de una representación semiótica a otra es un proceso de complejidad cognitiva que orienta a la comprensión de un contenido matemático, esta comprensión se evidencia con el uso espontáneo de diversas representaciones semióticas (Duval, 1993).

En la misma línea, Hitt (2000) afirma que es importante hacer uso de distintas representaciones en el aula para enseñar un concepto matemático. Además, Duval (2006) asevera que es indispensable desarrollar en los estudiantes habilidades de conversión entre representaciones para favorecer al entendimiento de conceptos, pues esto “es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas” (Duval, 2006, p. 166).

En particular, para el concepto de función, las tareas de transformar registros de representaciones semióticas podrían permitir a los estudiantes un mejor entendimiento del concepto, así como el desarrollo de procesos de visualización. Sin embargo, estas tareas no son vistas por muchos profesores como procesos fundamentales para la construcción del conocimiento (Prada-Núñez et al., 2017), pues “la misma función se puede representar en una serie de formas diferentes (por ejemplo, como una tabla, diagrama de flechas, gráfico, fórmula o por descripción verbal” (Dreyfus y Eisenberg, 1982, p. 361)* lo que genera inconvenientes a los docentes.

No obstante, Guzmán (1998) sostiene que el uso de registros de representaciones semióticas permite “la comprensión y adquisición de nociones conceptuales mediante la puesta en juego de los distintos registros de representación que exige la noción objeto de enseñanza” (p. 18).

Existen otros fenómenos posibles de estudiar cuando se utilizan las representaciones semióticas. Autores como Dreyfus (2002), Leinhardt et al. (1990) y Prada-Núñez et al. (2017)

afirman que en ocasiones se prefiere trabajar con la representación algebraica de la función. Además, Prada-Núñez et al. (2017) agregan que el hecho de que se prefiera dicha representación no significa que se domine. Dreyfus (2002) afirma que frecuentemente no se comprende la necesidad de realizar la transformación de representaciones semióticas, específicamente de la algebraica a la tabular o a la gráfica.

Por otra parte, según Prada-Núñez et al. (2017) los docentes deben “hacer énfasis en la utilización y articulación coherente de diversos registros de representación semiótica” (p. 11), pues, gracias a ello, se puede mejorar el nivel de comprensión del concepto de función. Respecto a esto, Leinhardt et al. (1990) agregan que las funciones y su representación gráfica deben tratarse como dos partes ligadas de un solo concepto pues favorecen la construcción y organización de las ideas matemáticas.

En ocasiones memorizar los conceptos matemáticos, obstaculiza la comprensión del concepto y las relaciones con sus representaciones, específicamente “saber” la definición formal de función, pero equivocarse al elegir si una gráfica representa a una función o no (Zúñiga y Melba, 2009).

Por los puntos de importancia que se presentaron anteriormente, Hitt (2003) propone que en el momento que se introduce el tema se puede crear un ambiente que permita la exposición de ideas intuitivas, mediante el uso de representaciones semióticas no oficiales, es decir, aquellas que no son las que usualmente se utilizan en el desarrollo formal del tema.

Por lo indicado, en este trabajo se considera valioso que los profesores en formación enfrenten actividades que les permitan desarrollar destrezas para comprender, utilizar y aprovechar el estudio de las distintas representaciones, durante la planificación y ejecución de prácticas educativas con el fin de romper con los esquemas tradiciones.

2.3.1.2. Estrategias y limitaciones sobre el abordaje de la función

El estudio de las funciones presenta distintos obstáculos o dificultades en el proceso de enseñanza (Fernández et al., 2018), que forman parte de los conocimientos pedagógicos del contenido que deben adquirir los docentes durante su formación inicial para desarrollar su labor. Se entiende por dificultad a “... una circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos” (González y Gómez, 2013, p. 25).

Una de las limitaciones que se han encontrado en la enseñanza de las funciones ha sido que los docentes enseñan a los estudiantes a realizar ejercicios de forma mecánica e instruyen técnicas para resolver problemas descontextualizados. Según lo planteado por Prada-Núñez et al. (2017), diversas investigaciones coinciden en que las problemáticas de enseñanza subyacen de la complejidad cognitiva del contenido y de la inadecuada intervención pedagógica, que aumentan las dificultades en los estudiantes. Dentro de estas, Artigue (1998) propone las siguientes categorías de dificultades para el aprendizaje de funciones:

- *Dificultades ligadas a la identificación de lo que es realmente una función y al reconocimiento de que las sucesiones son también funciones (p. 3).*
- *Dificultades para trascender los modos de pensamiento numérico y algebraico (p. 4).*

En este sentido, Artigue hace referencia a la necesidad de evitar que el estudiante pierda el verdadero significado de función dependiendo de la representación semiótica que se utilice. Más aún, en ocasiones los estudiantes presentan “más éxito en dar ejemplos de funciones que en proporcionar una definición adecuada del concepto” (Elia et al., 2008, p. 62)*.

Por su parte, Díaz (2008, p. 38) considera que los errores y dificultades en el aprendizaje de funciones se presentan en las siguientes cuatro áreas:

- *no considerar el dominio y el rango de las funciones,*
- *una tendencia por la regularidad,*
- *un enfoque puntual (en las gráficas) ; y*
- *una separación entre el contexto gráfico y el algebraico.*

Más aún, los estudiantes se concentran solamente en la expresión algebraica, olvidando el dominio y el rango. En consecuencia, ignoran esto al construir sus gráficas. Por ejemplo, los alumnos tienden a comprender las gráficas como lineales y unen los puntos en la gráfica (Díaz, 2008).

Ahora bien, de acuerdo con Ugalde (2014), es necesario conocer estrategias apropiadas para la enseñanza de funciones, ya que es uno de los temas más relevantes dentro de la matemática.

Con base en la idea anterior y los aportes de Shulman (1986; 1987), es importante que los profesores de matemática puedan conocer e identificar las dificultades para aprender funciones, así como, saber la manera de actuar de tal modo que estos obstáculos disminuyan o desaparezcan del proceso de aprendizaje. No es el objetivo de este trabajo ahondar en múltiples estrategias, pero para algunas ideas generales se puede consultar a Díaz (2008) y Roldan (2013).

Hasta este momento se han mostrado algunas dificultades que, generalmente, tienen los estudiantes al momento de aprender funciones. Ahora, se analizan algunas limitaciones que los docentes deben conocer para el abordaje de la función cuadrática.

2.3.1.3. Limitaciones sobre el abordaje de la función cuadrática

Córdoba et al. (2013) establecen de manera puntual algunas limitaciones que se presentan durante el estudio de la función cuadrática. Mencionan que a los estudiantes se les dificulta realizar diferentes representaciones de este tipo de función sin cometer errores, ya que no han interiorizado el concepto en estudio. Asimismo, tienen problemas para establecer la relación del coeficiente del término lineal con la posición del eje de la parábola, ni relacionan el coeficiente del término cuadrático mediante la información de la gráfica. Además, agrega que los problemas se presentan con mayor intensidad si la representación de partida es la gráfica.

Even (1990) establece que los futuros docentes de matemática presentan dificultades en la función cuadrática causadas por la falta de conexión entre las distintas representaciones de esta. Lo anterior se ejemplifica mostrando que si la expresión $ax^2 + bx + c$ toma valores positivos y negativos entonces tiene dos ceros, lo que se puede observar fácilmente mediante una representación gráfica, pero al no analizar la gráfica de la función por lo general recurren a solucionar la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Aunque no es un procedimiento incorrecto podría ser extenso y menos apropiado. Además, afirma que esta dificultad presentada por los futuros docentes de matemática puede ser provocada por la falta de relaciones y conexiones apropiadas entre ambas representaciones.

Otra dificultad presente en el aprendizaje de la función cuadrática se da al enseñar como una regla que la concavidad de la parábola está asociada con el signo del coeficiente del término cuadrático. Comprender la relación anterior, permite la generalización de las

relaciones entre el coeficiente principal de una expresión algebraica con su representación gráfica (Even, 1990).

Zaslavsky (1997) (citado por González et al., 2013) considera que en el estudio de las funciones cuadráticas con frecuencia se presentan los siguientes obstáculos:

1. *Dificultad al comprender e imaginar que la parábola se extiende infinitamente.*
2. *Confusión entre las propiedades de las funciones cuadráticas y las ecuaciones cuadráticas.*
3. *Preferencia al pasar de la representación algebraica a la gráfica.*

Zaslavsky (1997) (citado por González et al., 2013) ejemplifica el segundo aspecto de la siguiente manera: aunque la ecuación $x^2 + 3x - 6 = 0$ es equivalente a $3x^2 + 9x - 18 = 0$, la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x^2 + 3x - 6$ no es equivalente a la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = 3x^2 + 9x - 18$.

Hu et al. (2018) muestran que los maestros tienen mejor desempeño al cambiar el registro de representación de la función cuadrática que en la solución de problemas del mundo real utilizando la función cuadrática. Sin embargo, pocos de estos maestros mostraron una comprensión conceptual de las funciones cuadráticas. Así, los autores consideran necesario desarrollar en los futuros profesores los conocimientos sobre la resolución de problemas y estrategias pedagógicas que respondan a mejorar los errores de los alumnos.

2.3.2. Uso de la tecnología en la enseñanza de funciones

En esta sección se realizan algunas observaciones sobre el uso de la tecnología en la enseñanza; también se mencionan, sin pretender ser exhaustivos, diferentes actividades y estrategias que han sido propuestas para el aprendizaje de funciones utilizando estas herramientas. Se presentan técnicas y observaciones sobre el tema para el desarrollo de conocimientos tecnológicos de contenido y tecnológicos pedagógicos.

La tendencia a la incorporación de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje da pie para que diferentes investigadores se centren en cómo estas son utilizadas en las clases de matemática. Como afirma Guzmán (2001) las herramientas tecnológicas han influido potencialmente en la Educación Matemática. En el caso específico de los docentes en formación Haung y Zbiek (2016) sugieren que el uso de herramientas tecnológicas puede

ayudar a comprender los conocimientos matemáticos y mejorar la actitud para el uso de la tecnología en su labor profesional.

Por su parte, Bedoya (2002) analiza la didáctica de las funciones y considera que es imprescindible el uso de las tecnologías graficadoras. Este sugiere que en la formación inicial de profesores de matemática se debe desarrollar las habilidades necesarias para que estos posean múltiples técnicas de enseñanza sobre el tema y puedan utilizarlas en su futura praxis.

Además, Gómez-Chacón y Joglar (2010) aseguran que “cuando un estudiante universitario [futuro profesor de Matemática en Educación Secundaria] utiliza un software educativo para resolver problemas de matemática, no genera espontáneamente un método para integrar el software en su futuro” (p. 498)*. Esto evidencia que el hecho de incluir las herramientas tecnológicas en la clase de los docentes en formación no es suficiente para lograr una verdadera implementación de las TIC.

Por otra parte, para trabajar el concepto de función cuadrática, Hupaya (2012) propone utilizar la hoja de cálculo de Excel, ya que este permite modificar parámetros y observar los cambios que sufre el registro de representación gráfica de la función. La ficha de Excel permite trabajar con los diversos registros para representar la función cuadrática y asegura que esta técnica ayuda a determinar la representación algebraica a partir de la representación gráfica.

Alfonzo (2012) afirma que la tecnología es una herramienta que influye en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, pero que “esto no ocurrirá adquiriendo calculadoras gráficas y computadoras, es necesario conocer su uso en la clase de matemática y sus implicaciones para el futuro” (p. 40). Este autor, propone una secuencia didáctica para estudiar la función lineal y cuadrática a través de softwares como Derive, Calculus o Maple, ya que permite complementar la explicación del docente. Agrega que el uso de estas herramientas facilita la comprensión de conceptos relacionados con funciones y gráficas, e incentiva la creatividad del estudiante preparándolo para ser más independiente.

El uso de herramientas tecnológicas en el tema de funciones puede facilitar reflexiones sobre las características de cada función, que serían difíciles de visualizar sin ellas. De la misma forma, permiten analizar varias representaciones de una función al mismo tiempo.

En definitiva, como ha sido justificado ampliamente en esta sección, es necesario que los docentes de matemática posean un alto conocimiento del contenido de funciones. Es decir, conocer qué es una función: diferentes definiciones, representaciones, historia, características e interpretaciones, entre otros aspectos, ya que esto permite que el docente tenga las herramientas necesarias para ejemplificar su uso y contextualizar las funciones, dotándolas de utilidad y sentido.

Además, se requiere desarrollar el conocimiento pedagógico del contenido para que el profesor conozca las limitaciones, dificultades y errores relacionados con este tema, asimismo este conocimiento le permite al docente prevenir algunas de las problemáticas mencionadas. Más aún, el profesor debe conocer las metodologías adecuadas con las que puede enfrentar las dificultades presentadas en el desarrollo de las lecciones y debe tener las habilidades para discernir en cuáles aspectos del contenido de funciones es conveniente apoyarse en las TIC e incluso, cuál herramienta tecnológica se adapta mejor para fortalecer los conocimientos y donde generalmente se presentan las dificultades.

Así, las tecnologías son útiles en la medida que se integren de forma apropiada a tareas matemáticas (en su contenido y su enseñanza). De igual forma, las TIC favorecen la contextualización del contenido de funciones, es decir, con su ayuda se puede mostrar de una forma aplicada a los profesores de matemática en formación las utilidades de este tema en diferentes contextos de la cotidianidad, por estas razones es importante que los docentes en formación desarrollen el conocimiento tecnológico del contenido de funciones.

3. Capítulo III: Marco Metodológico

3.1. Tipo de investigación

Esta investigación se enmarca en el paradigma naturalista pues dentro del estudio está presente el deseo de acercarse a la realidad social, comprenderla y transformarla (Villalobos, 2017), específicamente en la realidad educativa de la formación inicial de profesores. Desde esta perspectiva, como los objetivos del estudio se dirigen a caracterizar los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido que muestran los profesores de matemática en formación inicial de la UNA, la investigación se ubica dentro del enfoque cualitativo, pues este "... produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable" (Taylor y Bogdan, 2000, p. 7).

Además, el trabajo incluye interpretaciones de la información que brindaron los profesores de matemática en formación inicial, de modo que la investigación es de tipo descriptivo y se realiza desde una postura hermenéutica interpretativa, pues esta se refiere a "una actividad ... para abordar el texto oral o escrito y captar con precisión y plenitud su sentido" (Arráez, Calles y Moreno de Tovar, 2006, p. 1). El fin de este estudio es caracterizar los conocimientos del modelo TPACK que evidencian los profesores de matemática en formación, sin embargo, existe la posibilidad que los instrumentos utilizados no puedan evidenciar todos los conocimientos que el profesor de matemática en formación posee, lo que coincide con una característica propuesta por Villalobos (2017) acerca del método hermenéutico.

3.2. Participantes

Según BLEM (2017), durante el primer ciclo del segundo nivel de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional, los estudiantes deben matricular las asignaturas: MAC403 Principios de matemática II, MAC404 Recursos Informáticos y DEY402 Modelos pedagógicos y teorías de aprendizaje, que están relacionadas con los conocimientos base del modelo TPACK: tecnológicos, pedagógicos y de contenido de funciones

Por lo tanto, en esta investigación se consideraron como participantes a 27 estudiantes de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la UNA,

matriculados en el curso MAC404 Recursos Informáticos pertenecientes al plan de estudios BLEM (2017), durante el I ciclo 2020. Cabe destacar que, de estos participantes, 10 ya habían aprobado el curso DEY402 Modelos pedagógicos y teorías del aprendizaje; los restantes 17 cursan bloque completo. Estos sujetos son denominados Profesores de Matemática en Formación Inicial (PMFI). Además, para el análisis de la información se utiliza P1, P2, hasta P27 para hacer referencia a un participante en específico.

Los PMFI se encontraban en segundo nivel de carrera, se contó con la participación de 10 mujeres y 17 hombres con edades entre los 18 y 28 años, provenientes de las provincias de San José (8), Alajuela (6), Heredia (2), Puntarenas (9) y Limón (2); además, 16 han impartido clases en instituciones de educación secundaria o clases particulares. De los participantes, solamente 13 han aprobado todos los cursos de la carrera matriculados, cabe recalcar que 11 han reprobado el curso Matemática Fundamental y 3 el curso de Principios de la Matemática I.

Es importante subrayar que el objetivo de este estudio no es evaluar la efectividad del BLEM (2017) con respecto al modelo TPACK, sino que se centra en caracterizar los conocimientos que evidencian los profesores en formación inicial durante el desarrollo de los cursos relacionados con los dominios de este modelo. Por esta razón se escogió la muestra de manera intencional, pues menciona Patton (1990) que esta técnica de muestreo permite conocer a fondo una información de cierta población.

3.3. Instrumentos de recolección de información

En seguida, se describen las técnicas y los instrumentos aplicadas y elaboradas para la recolección de información en este estudio.

3.3.1. Metodología de la revisión bibliográfica

La revisión bibliográfica, como instrumento de recolección de información, brindó los aportes teóricos necesarios para el planteamiento y construcción del marco teórico de este trabajo. Según Goris y Adolf (2015) se entiende una revisión bibliográfica como “una sinopsis que resume diferentes investigaciones y artículos que nos da una idea sobre cuál es el estado actual de la cuestión a investigar” (p. 3), además “es un procedimiento estructurado cuyo objetivo es la localización y recuperación de información relevante para

un usuario que quiere dar respuesta a cualquier duda relacionada con su práctica” (Gálvez, 2002, p. 25). Se realizó una revisión bibliográfica de libros de texto, artículos de revista, actas de congresos, trabajos finales de graduación, entre otros documentos. Dicha exploración se enfocó en temáticas relacionadas con: el modelo TPACK, formación de profesores de matemática a nivel nacional e internacional, sistemas de conocimiento del profesor, errores y dificultades en la enseñanza de las funciones. Con el fin de realizar esta búsqueda se consultaron las siguientes bases de datos: Dialnet, Education Research Complete, ERIC, Funes, Google Scholar, JSTOR, Redalyc, Scielo, Science, Scopus, Springer.

Para la recopilación de la información se utilizaron dos fichas que facilitan su síntesis. En una de ellas se ordenaron todos los documentos consultados, además de una descripción breve de su temática y su localización. La segunda ficha se dividió de acuerdo con las temáticas mencionadas anteriormente, en esta se encuentra el nombre del documento, los aportes a esta investigación y un comentario reflexivo sobre cada aporte.

3.3.2. Cuestionario diagnóstico

El cuestionario es un instrumento de recolección de información que, según García (2003), consiste en “un conjunto de preguntas, normalmente de varios tipos, preparado sistemática y cuidadosamente, sobre los hechos y aspectos que interesan en una investigación o evaluación, y que puede ser aplicado en formas variadas, entre las que destacan su administración a grupos” (García, 2003, p. 2). Se utilizó el cuestionario para recolectar información acerca del conocimiento tecnológico y pedagógico que evidencian los PMFI y para conocer acerca de sus datos generales, dicho instrumento está conformado por 17 preguntas y se puede consultar en el Anexo 1.

3.3.3. Tarea matemática

Se entiende una tarea matemática como “una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con la matemática y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para la evaluación del aprendizaje” (Moreno y Ramírez, 2016, p. 244). Además, Moreno y Ramírez (2016) consideran que la tarea se asocia con los objetivos para los que se solicita, a diferencia de la actividad matemática que se asocia con la acción que realiza el alumno. Entendiendo así que en una tarea matemática el profesor

no participa de forma directa en la actividad que realiza el alumno, pero es el que construye la tarea y dispone de los medios.

Respecto a lo anterior, según Socas et al. (2013) el profesor debe enfrentarse a dos aspectos: “organizar el contenido matemático para enseñar y gestionar el contenido matemático para enseñar” (p. 73). Además, Moreno y Ramírez (2016) proponen introducir la tarea matemática con alguna situación real.

Los aspectos anteriormente mencionados guían la construcción de las tareas matemáticas que permitirán caracterizar los conocimientos de los PMFI.

3.4. Contexto de la investigación: el curso MAC404 Recursos Informáticos

El curso MAC404 Recursos Informáticos está ubicado en el tercer semestre del BLEM. En este se pretenden desarrollar habilidades para el uso de software de geometría dinámica, hojas de cálculo, softwares simbólicos, editores de texto matemático y elementos básicos de presentaciones, así, se espera que el curso permita dominar comandos básicos para manipular deslizadores y para graficar: objetos geométricos, curvas en dos dimensiones, funciones elementales y funciones a trozos. Se pretende que los PMFI puedan editar textos científicos con contenido matemático y que diseñen presentaciones haciendo uso de alguna herramienta tecnológica. También, se espera que los PMFI logren planear actividades didácticas para integrar la tecnología en la enseñanza de algún tema (UNA, 2020).

Durante este curso se muestra la utilidad de las TIC en la educación matemática, mediante la realización de actividades y el estudio de bibliografía sobre el tema. La evaluación cuenta con tres fases: Diagnóstica, Formativa y Sumativa (UNA, 2020).

Los instrumentos diseñados en esta investigación se aplicaron en el curso MAC404 y fueron parte de la evaluación sumativa ya que corresponden al Área Temática 1 donde se pretende desarrollar las siguientes subcompetencias (UNA, 2020, p. 3).

- Utilizar diferentes recursos tecnológicos o softwares matemáticos para construir y manipular gráficas de funciones con el propósito de analizar de forma intuitiva sus propiedades.
- Crear animaciones básicas para ilustrar tendencias, comportamientos y propiedades geométricas y de funciones.

Es necesario resaltar que la evaluación sumativa de los instrumentos la realizó el docente a cargo de cada grupo.

3.5. Fases de la investigación

El diseño metodológico de la investigación se organizó en cuatro fases que fueron necesarias para su desarrollo, las cuales se describen a continuación.

3.5.1. Fase 1: Revisión literaria y planteamiento del problema

Esta fase de investigación se realizó en enero-marzo de 2019, por medio de la revisión bibliográfica. Se tomaron como bases los trabajos realizados por Mishra y Koehler, autores del modelo TPACK, además de otros estudios que se enfocan en el modelo e investigaciones recientes obtenidas en bases de datos especializadas y de primer corriente (Scopus y Web of Science). También se consultó bibliografía sobre temas de: enseñanza de la matemática (específicamente sobre funciones), representaciones semióticas, formación de profesores de matemática, uso e importancia de las tecnologías en la enseñanza, tanto a nivel nacional e internacional. Lo anterior con el fin de obtener referentes para el planteamiento de la investigación.

3.5.2. Fase 2: Revisión literaria y construcción del Marco Teórico

La construcción del marco teórico se efectuó a través de la revisión bibliográfica durante los meses de abril-julio de 2019. Primero, se consultaron documentos que permitieron describir y fundamentar el modelo TPACK y esto facilitó la obtención de los indicadores e instrumentos que han sido utilizados para estudiar los conocimientos que propone este arquetipo. Del mismo modo, se indagaron textos más específicos que permitieron conocer las limitaciones, errores y estrategias en la enseñanza de las funciones. Se realizó un estudio corto sobre la formación de los PMFI en el tema funciones, se analizaron los programas de los cursos relacionados con este contenido en cada universidad pública costarricense. En general se indagó sobre la instrucción de los profesores formados en las universidades públicas, para tener una idea global del contexto. Además, se examinaron documentos que muestran la importancia del uso de las TIC en la enseñanza de funciones.

3.5.3. Fase 3: Construcción, validación y aplicación de instrumentos de recolección de información

Este proceso inició en el mes de agosto de 2019, realizando una adaptación de las unidades de análisis de los conocimientos del modelo TPACK examinadas en la literatura. Se tomó en cuenta el entorno de la Universidad Nacional y se descartaron aquellas que no eran viables de analizar en esta investigación. Además, gracias a la indagación teórica realizada en la fase anterior, surgieron nuevas unidades de análisis consideradas importantes de estudiar.

Se aplicaron a los PMFI tres instrumentos de recolección de información, que permiten analizar los seis conocimientos que propone el modelo TPACK, según las unidades y categorías posteriormente definidas y, de esta manera se alcanza el segundo objetivo específico.

Cuestionario Diagnóstico: este instrumento se creó durante los primeros 15 días del mes de agosto de 2019, cuenta con dos secciones que deben responderse de forma individual, y fue aplicado por los investigadores el martes 11 de febrero, durante la primera sesión del curso MAC404 Recursos Informáticos del primer ciclo del año 2020, en un espacio facilitado por los docentes de los dos grupos existentes. La primera sección cuenta con 11 preguntas cerradas que permiten conocer los datos generales de los participantes como: sexo, edad, lugar de procedencia, nivel de carrera, repetencia de materias, cursos matriculados, entre otros.

La segunda sección se compone de siete preguntas acerca de la autopercepción de los PMFI sobre su conocimiento tecnológico. El primer ítem es una escala Likert y fue adaptada de Cabero et al. (2015) y Schmidt et al. (2009), como se puede consultar en el Anexo 1.

Con el fin de asegurar la fiabilidad de dicho instrumento, Cabero et al. (2015) lo aplicaron a 1326 docentes donde se determinó que es altamente eficaz pues la consistencia interna del instrumento medida con alfa de Cronbach obtuvo un valor de 0,965 y, específicamente, en el apartado del conocimiento tecnológico se obtuvo un valor de 0,906 (Cabero et al., 2015).

Asignación de tareas matemáticas: este instrumento fue construido durante los últimos 15 días del mes de agosto de 2019. En la primera semana del mes de junio de 2020, se procedió con una adaptación del instrumento, para aplicarse en línea por medio de la plataforma Moodle, el 9 de junio de este mismo año. Esto debido a la emergencia nacional del COVID-19.

Como lo muestra el anexo 2, este instrumento está compuesto por diferentes tareas matemáticas acerca de la función cuadrática que permiten evidenciar los conocimientos TPACK de los PMFI. Se plantean situaciones contextualizadas para que los participantes desarrollen sus saberes sobre esta función; los contextos de los problemas son tomados del material del curso MAC403 Principios de Matemática II construido por Alpízar (2019), con la diferencia de que el objetivo del problema cambia por completo, es decir, este material está construido por diferentes ejercicios matemáticos que son utilizados como práctica del curso y las preguntas que se plantean en este instrumento tienen un fin diferente que el de las planteadas en el material del curso, ya que las interrogantes buscan un acercamiento a los conocimientos propuestos por el modelo TPACK. Los PMFI debían realizar representaciones animadas de las situaciones en el software GeoGebra, interpretar estas animaciones y algunos conceptos relacionados con las funciones cuadráticas dentro del contexto. Además, se solicitaba que indicaran algunas estrategias sobre cómo se enseña la función cuadrática en secundaria y la forma en que se sugiere desarrollar este tema según lo planteado en los programas oficiales de estudio.

Aunado a lo anterior, se requería que los PMFI propusieran una situación para abordar la función cuadrática utilizando GeoGebra en secundaria y crearan las instrucciones para guiar al estudiante en dicha actividad. Luego, los participantes debían compartir las instrucciones a un foro de la plataforma Moodle de la Universidad Nacional.

Reflexión sobre el análisis de instrucciones: este instrumento se creó durante la última semana del mes de agosto de 2019 y en la primera semana de junio de 2020 se habilitó el foro en la plataforma Moodle para que los PMFI lo completaran del 11 al 16 de junio de 2020. En esta actividad, a cada PMFI se le asignó reflexionar sobre la actividad que planteó uno de sus compañeros en el instrumento de *Asignación de Tareas Matemáticas* y generar un comentario con ideas o posiciones justificadas para mejorar la calidad de la actividad, a

través de la socialización en el foro como se muestra en el Anexo 3. Esta etapa se encuentra ligada con el conocimiento TPACK, debido a que los PMFI deben de reflexionar sobre cómo la organización de la actividad y las instrucciones creadas pueden influir en el aprendizaje.

Proceso de validación de instrumentos: los instrumentos creados para esta investigación fueron sometidos a un proceso de validación con personas expertas en pedagogía, tecnología y contenido matemático de funciones, realizado en dos etapas. En la primera etapa se validó el *Cuestionario Diagnóstico* durante el mes de enero de 2020 y la segunda etapa se llevó a cabo desde el 21 de abril hasta el 30 de mayo del mismo año, en ella se validaron los instrumentos: *Asignación de Tareas Matemáticas* y *Reflexión sobre el Análisis de Instrucciones*. Se construyeron cuatro instrumentos de validación durante el mes de enero del 2020, el primero con el fin de validar las unidades de análisis, y los demás para valorar los instrumentos de recolección de información. El primer instrumento de validación cuenta con una pequeña descripción de esta investigación, en la que se especificó el tema y los objetivos, además en cada uno de los instrumentos se realizaron preguntas respecto a la redacción, ortografía y pertinencia de las unidades de análisis. También, se hizo hincapié en valorar si los ítems permiten evidenciar la o las unidades de análisis que se le asignaron y finalmente se cuestionó si los instrumentos de recolección de información permiten cumplir el objetivo general de investigación.

Para este proceso se contó con la colaboración de: M. Sc. Marcela García Borbón, M. Sc. Ricardo Poveda Vásquez, Dr. Cristian Alfaro Carvajal y Dr. Romilio Loría, los cuales cuentan con amplio bagaje en docencia universitaria y realizaron estudios superiores en didáctica de la matemática. Además, Ricardo Poveda Vásquez, Romilio Loría y Cristian Alfaro Carvajal han trabajado con modelos de organización del conocimiento del profesor de matemática.

Se destaca que, aunque el profesor Ricardo Poveda es parte del comité asesor de este trabajo también se le consideró como validador, ya que este conoce el modelo TPACK, laboró 10 años en educación secundaria, trabajó dos años como asesor nacional de matemática en el MEP y ha investigado sobre didáctica del álgebra, específicamente en pensamiento funcional, el currículo actual de matemática y la resolución de problemas.

Razones que permiten considerarlo como un validador con gran conocimiento para esta investigación.

3.5.4. Fase 4: Análisis de la información

Para la construcción de los instrumentos se tomaron en cuenta las unidades de análisis que se abordan en la sección 3.6. Así, cada ítem de los instrumentos está planteado en función de una o varias unidades de análisis. De esta forma, la información recogida con los tres instrumentos descritos anteriormente se analizó por medio del análisis de contenido propuesto por Bardin (1996), ya que los datos proporcionados son documentos escritos. Lo que implica estudiar las ideas de los PMFI, con el fin de verificar si se evidencia el conocimiento que está ligado a cada ítem.

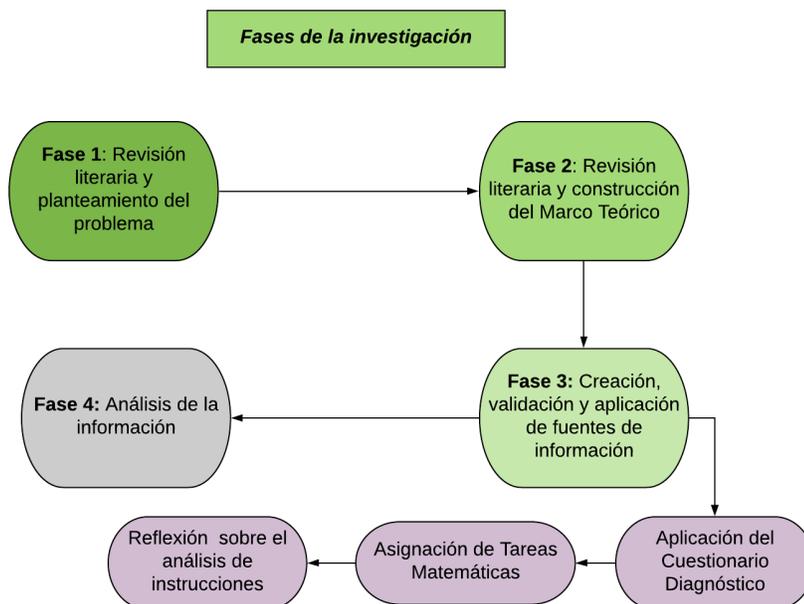
Además, para el análisis de las tareas matemáticas se debe considerar la reflexión objetiva de las respuestas de los PMFI, lo cual permite valorar la organización de los procedimientos, examinar el desarrollo de los saberes matemáticos, pedagógicos y tecnológicos con la meta de describir los conocimientos que poseen los PMFI.

En la figura 2 se muestra un esquema que resume las fases de la investigación y las actividades principales en cada una de estas.

3.5.5. Esquema de las fases de la investigación

Figura 2

Esquema de las fases de la investigación



Fuente: Elaboración propia

3.6. Categorías de análisis

Para este estudio se establecieron las siguientes categorías basadas en el modelo TPACK: (a) conocimiento pedagógico (PK), (b) conocimiento tecnológico (TK), (c) conocimiento de contenido (CK), (d) conocimiento tecnológico pedagógico (TPK), (e) conocimiento pedagógico de contenido (PCK), (f) conocimiento tecnológico del contenido (TCK) y el (g) conocimiento tecnológico pedagógico de contenido (TPACK). Estas permiten caracterizar los conocimientos que evidencian los PMFI en la Universidad Nacional. Para cada una de las categorías mencionadas se establece una serie de unidades de análisis que son guías para realizar la caracterización (categorización) de los conocimientos del profesor.

Como se mencionó en el marco teórico, los estudios internacionales realizados por Arévalo-Duarte et al. (2019), Kirikçilar y Yildiz (2018), Schmidt et al. (2009), brindan la base para la adaptación de las unidades de análisis correspondientes a cada categoría, además

se incluyen otras a partir del análisis de estas referencias. Estas unidades fueron validadas por expertos.

- ***Conocimiento Pedagógico (PK)***

PK1. Selecciona aspectos que influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

PK2. Conoce diversas estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

PK3. Argumenta sobre el potencial que tienen las diversos métodos y estrategias para la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

- ***Conocimiento Tecnológico (TK)***

TK1. Sabe resolver problemas técnicos (Schmidt, Baran, Thompson, Mishra, Koehler y Shin, 2009).

TK2. Asimila conocimientos tecnológicos fácilmente (Schmidt, Baran, Thompson, Mishra, Koehler y Shin, 2009).

TK3. Se mantiene actualizado sobre nuevas tecnologías (Schmidt, Baran, Thompson, Mishra, Koehler y Shin, 2009).

TK4. Conoce muchas tecnologías diferentes (Schmidt, Baran, Thompson, Mishra, Koehler y Shin, 2009).

TK5. Ha tenido oportunidades suficientes de trabajar con diferentes tecnologías (Schmidt, Baran, Thompson, Mishra, Koehler y Shin, 2009).

TK6. Se siente cómodo al utilizar la tecnología.

TK7. Expresa que a menudo juega y hace pruebas con la tecnología (Önal, 2016).

TK8. Posee los conocimientos técnicos que necesita para usar la tecnología (Önal, 2016).

- ***Conocimiento de Contenido (CK)***

CK1. Brinda una definición adecuada del concepto de función cuadrática.

CK2. Encuentra la expresión algebraica que describe la situación planteada.

CK3. Determina elementos específicos de la función cuadrática.

- ***Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK)***

TPK1. Selecciona tecnologías que pueden facilitar la enseñanza y el aprendizaje de la función cuadrática.

TPK2. Reflexiona sobre la forma en que la tecnología influye en el aprendizaje de la función cuadrática.

TPK3. Adopta un pensamiento crítico sobre la forma de utilizar la tecnología en el aula (Schmidt, Baran, Thompson, Mishra, Koehler y Shin, 2009).

TPK4. Promueve actividades de aprendizaje donde se manipulen herramientas tecnológicas (Önal, 2016).

TPK5. Sugiere herramientas tecnológicas que contribuyan al desarrollo de conocimientos y habilidades acerca de la función cuadrática.

TPK6. Representa situaciones reales por medio de un software.

- ***Conocimientos Pedagógico de Contenido (PCK)***

PCK1. Interpreta de manera correcta los elementos de la función cuadrática de acuerdo con el contexto.

PCK2. Diseña actividades sobre función cuadrática que favorecen el desarrollo conceptual y procedimental de los estudiantes (Arévalo, García y Hernández, 2019).

PCK3. Plantea actividades que inicien con aspectos generales o sencillos para posteriormente profundizar con aspectos formales o más complejos.

PCK4. Manifiesta de forma clara la relación existente entre las representaciones de la función cuadrática.

PCK5. Conoce los alcances de la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática en secundaria.

PCK6. Propone abordar los cuatro momentos que establece el programa de estudios del MEP.

PCK7. Sabe sobre errores que presentan los estudiantes sobre la comprensión de la función cuadrática.

PCK8. Aplica la información asociada con la vida real en el diseño de una actividad (Kiriçilar y Yildiz, 2018).

PCK9. Diseña actividades donde se utilice de forma adecuada las diferentes representaciones de la función cuadrática.

- ***Conocimiento Tecnológico del contenido (TCK)***

TCK1. Conoce recursos tecnológicos que se pueden utilizar para trabajar con funciones cuadráticas.

TCK2. Interpreta los conceptos básicos de la función cuadrática mediante una representación dada en un software.

TCK3. Utiliza animaciones y dibujos gráficos para enriquecer su propuesta de actividad matemática.

TCK4. Utiliza softwares ya instalados en computadoras (Excel, GeoGebra, Rstudio, Sketchpad, Winplot, etc.) con objetivos matemáticos.

TCK5. Busca en la Web aquellos conceptos o información relacionada con función cuadrática.

TCK6. Considera que existen ventajas y desventajas al utilizar recursos tecnológicos en la enseñanza de la matemática.

- ***Conocimiento Tecnológico Pedagógico de Contenido (TPACK)***

TPACK1. Integra de manera eficaz matemática, tecnología y pedagogía en la planificación de una actividad para la enseñanza de función cuadrática.

TPACK2. Utiliza la representación semiótica más adecuada para enseñar aspectos de la función cuadrática, a través de una herramienta tecnológica.

TPACK3. Sabe sobre tecnologías adecuadas en la enseñanza de las funciones, la forma de utilizarlas y cómo estas influyen en el proceso de enseñanza.

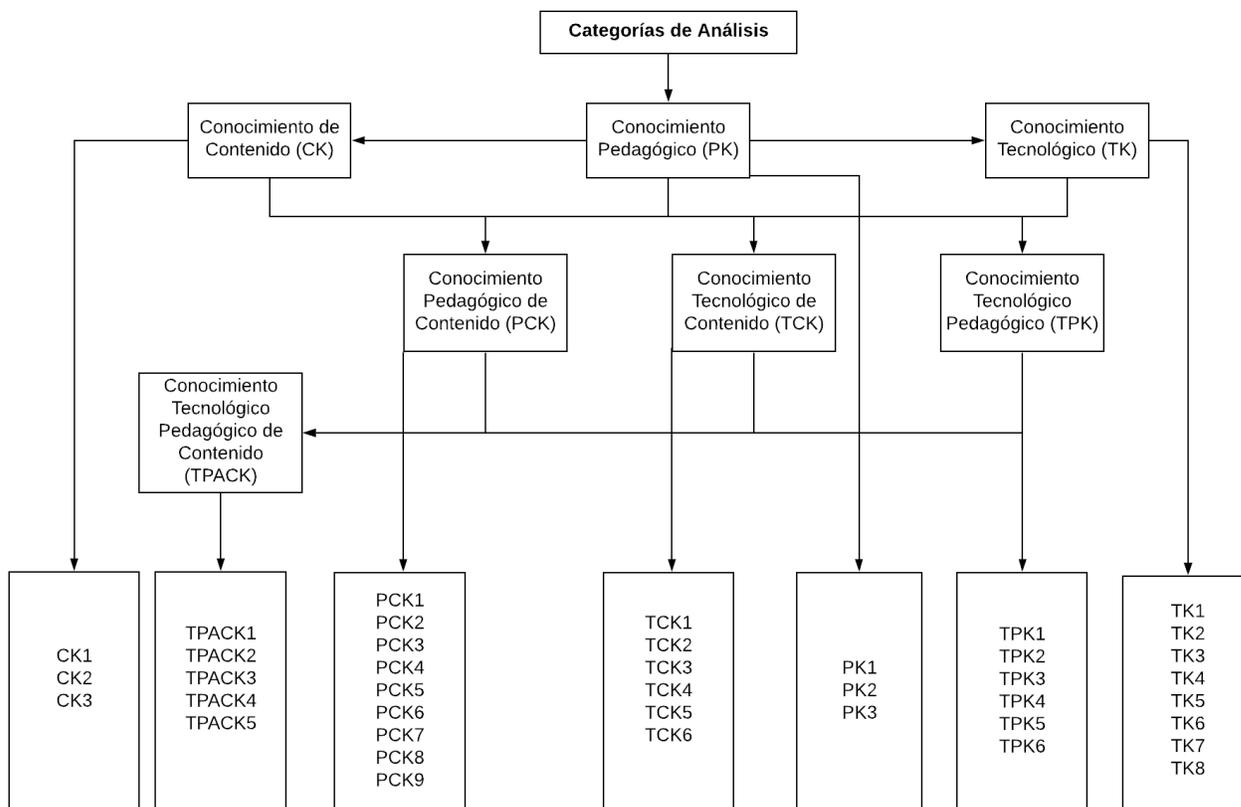
TPACK4. Posee la capacidad de usar dispositivos tecnológicos para medir el conocimiento preliminar de los estudiantes sobre contenidos matemáticos (Önal, 2016).

TPACK5. Sabe utilizar dispositivos tecnológicos que permiten identificar las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de función cuadrática.

En la figura 3 se muestra un mapa de las categorías y subcategorías que se utilizan en esta investigación.

Figura 3

Diagrama codificado de categorías y subcategorías de análisis



Nota. Elaboración propia

3.7. Técnicas de análisis de la información

Para el análisis de la información obtenida se utilizó la técnica de análisis de contenido.

Según Bardin (1996) el análisis de contenido se entiende como:

el conjunto de técnicas de análisis de las comunicaciones tendentes a obtener indicadores (cuantitativos o no) por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes permitiendo la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción/recepción (contexto social) de estos mensajes (p. 32).

Desde este punto de vista, la objetividad que proporciona el análisis de contenido permite reproducir la recolección de información y el análisis de datos, de manera que los

resultados obtenidos en este trabajo sean susceptibles a su verificación (Andréu, 2002; Fernández, 2002). Además, una vez establecidos los objetivos de estudio y el sistema de categorías, se diseñaron las tablas que permiten evidenciar la relación entre las unidades de estudio y cada ítem de los instrumentos propuestos, lo cual hace referencia a la sistematización, que tienen que ver con el seguimiento de pautas organizadas para el análisis de la información de modo que se abarque la totalidad del contenido estudiado, lo que coincide con una de las características propias de esta técnica de análisis de información (Andréu, 2002).

A continuación, se presenta la Tabla 1, donde se especifica las unidades de análisis de cada categoría que se analizaron en cada pregunta del *Cuestionario Diagnóstico*.

Tabla 1

Distribución de las unidades de análisis en el Cuestionario Diagnóstico

Categoría	Unidades de análisis	Ítem de análisis
TK	TK1	1
	TK2	1
	TK3	1
	TK4	1
	TK5	1
	TK6	1
	TK7	1
	TK8	1
TPK	TPK1	3
	TPK5	6
PCK	PCK7	2
TCK	TCK1	3 y 6
	TCK5	5
	TCK6	7
TPACK	TPACK3	4

La tabla 2 especifica las categorías y unidades de análisis que se examinaron en la *Asignación de Tareas Matemáticas*.

Tabla 2

Distribución de las unidades de análisis en la Asignación de Tareas Matemáticas

Categoría	Unidades de análisis	Ítem de análisis
PK	PK1	1 y 2
	PK2	3
	PK3	3
CK	CK1	4

	CK2	5
	CK3	7, 8, 12
TPK	TPK4	15.a
	TPK6	15.a
	PCK1	7, 9, 11 y 12
PCK	PCK2	15.a
	PCK3	15.a y 15.b
	PCK4	11
	PCK5	13
	PCK6	13, 14 y 15.a
	PCK8	15.a
	PCK9	11 y 15.a
	TCK	TCK2
TCK3		7
TCK4		6
TPACK		TPACK1
	TPACK2	15.a y 15.b

A continuación, se presenta la tabla 3 que especifica en la *Reflexión sobre el Análisis de Instrucciones*, las categorías que se analizaron y por medio de cuáles unidades de análisis.

Tabla 3

Distribución de las unidades de análisis en la Reflexión sobre el Análisis de Instrucciones

Categoría	Unidades de análisis	Ítem de análisis
TPK	TPK2	2 y 4
	TPK3	2 y 4
TPACK	TPACK1	3
	TPACK3	2 y 4
	TPACK4	2 y 4
	TPACK5	2 y 4

Como se muestra en las tablas anteriores, la codificación de las unidades de análisis facilitó obtener un recuento numérico de las evidencias recolectadas sobre cada unidad de análisis, lo que está relacionado con la cuantificación, característica de esta técnica de análisis (Andréu, 2002) y que es útil para la descripción general de las evidencias de los conocimientos que se encuentren dentro del análisis.

Por otro lado, el análisis de contenido dentro de la investigación cualitativa debe procurar no quedarse solamente con la interpretación del contenido manifiesto, sino que profundice en el contexto social de donde se recoge la información (Andréu, 2002). Asimismo, los resultados obtenidos mediante esta técnica de análisis de información pueden ser comparados con otros estudios utilizando la triangulación, de modo que mejora la posible subjetividad que puede darse en los análisis de datos cualitativos.

3.8. Criterios de validez de los resultados

Para el análisis de la información conseguida se utilizó el método de triangulación, que consiste en comparar y contrastar la información obtenida, con el objetivo de dar validez a los resultados y mejorar las interpretaciones que se realicen. En la literatura existen clasificaciones de esta técnica de análisis, pero para efectos de este estudio se tomaron en cuenta solo dos de las mencionadas por Carter et al. (2014):

- Triangulación metodológica: involucra el uso de distintos tipos de instrumentos para la obtención de información, que permiten visualizar variantes o semejanzas entre datos, lo cual facilita realizar una descripción detallada de las características que se presentan en cada uno de los dominios del modelo TPACK.
- Triangulación de la fuente de datos: se recopila la información de diversas personas, grupos o comunidades, para compararla y obtener la validación de la información. Se recolectan datos de los PMFI descritos anteriormente y se comparan las respuestas de estos con el fin de encontrar similitudes o diferencias, con lo que se establecieron las principales características de los conocimientos evidenciados por los PMFI propuestos por el modelo TPACK.

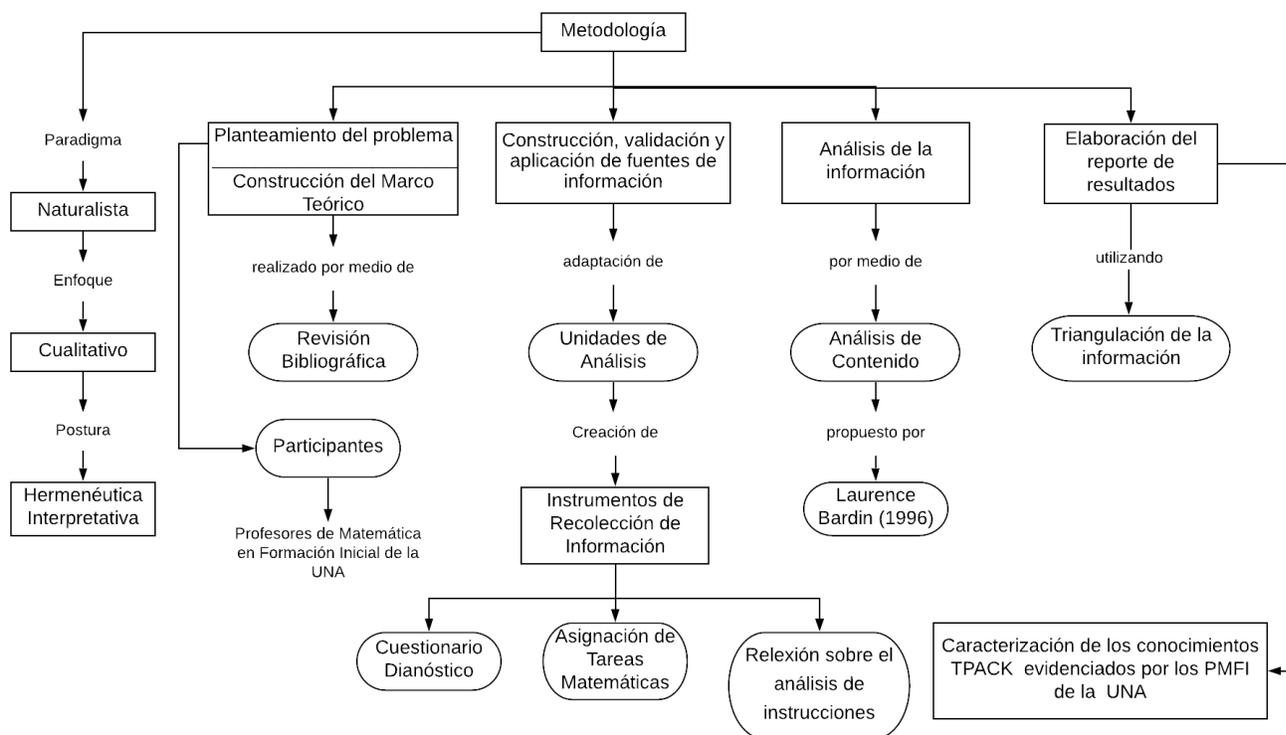
Además, según agrega Okuda y Gómez (2005) sin importar el tipo de triangulación que se utilice este criterio permite visualizar el objeto de estudio desde diferentes ángulos lo que aumenta la consistencia de los resultados.

3.9. Esquema metodológico

Para finalizar con este capítulo, la figura 4 presenta el esquema sobre la organización metodológica que orientó esta investigación. Señala el paradigma, el enfoque y las fases que se realizaron para caracterizar los conocimientos de los profesores en este estudio.

Figura 4

Esquema Metodológico



Nota. Elaboración propia

4. Capítulo IV: Análisis

En este apartado se presenta el análisis de información organizada respecto a los instrumentos de recolección aplicados y, a su vez, se sistematizan los datos por cada unidad de análisis (dominio del modelo TPACK).

Como se explicó en el capítulo anterior, el proceso de recolección de información se realizó a través de tres etapas. La primera consta de la aplicación del *Cuestionario Diagnóstico*; la segunda sobre la *Asignación de Tareas Matemáticas*; para el análisis de la información que se obtuvo en estas dos etapas se contó con la participación de 27 PMFI. La tercera etapa se basó en la *Reflexión sobre el Análisis de Instrucciones*, de los participantes no se pudo contar con la colaboración de dos personas, por lo que al realizar el análisis de esta información se consideran los aportes de 25 personas.

4.1. Cuestionario diagnóstico

A continuación, se presenta los datos obtenidos del instrumento *Diagnóstico*; este ha permitido conocer elementos importantes sobre los aspectos personales de los participantes y sobre información vinculada a algunos conocimientos. Estos son categorizados con los indicadores del modelo TPACK.

4.1.1. Conocimiento tecnológico

En la tabla 4 de frecuencia se muestra información sobre la autopercepción del conocimiento tecnológico (TK) de los PMFI, específicamente se abarcan las unidades de análisis desde la TK1 hasta la TK8.

Tabla 4

Frecuencias absolutas de la cantidad de PMFI y su autopercepción del conocimiento tecnológico TK.

Conocimiento Tecnológico	MD	D	N	A	DA
TK1. Sé resolver mis problemas técnicos básicos con la tecnología.	3	3	7	7	7
TK2. Asimilo conocimientos tecnológicos fácilmente.	1	3	1	16	6
TK3. Me mantengo al día de las nuevas tecnologías importantes.	1	7	7	7	5
TK4. Conozco muchas tecnologías diferentes.	2	6	8	8	3

TK5. He tenido oportunidades suficientes de trabajar con diferentes tecnologías.	2	7	8	6	4
TK6. Me siento cómodo al utilizar la tecnología.	0	1	5	11	10
TK7. A menudo juego y hago pruebas con la tecnología.	2	8	8	4	5
TK8. Tengo los conocimientos técnicos que necesito para usar la tecnología.	1	4	11	7	3

Observación: Se consideró MD=Muy en desacuerdo; D=Desacuerdo; N=Ni en desacuerdo ni en acuerdo; A=De acuerdo; DA=Muy de acuerdo.

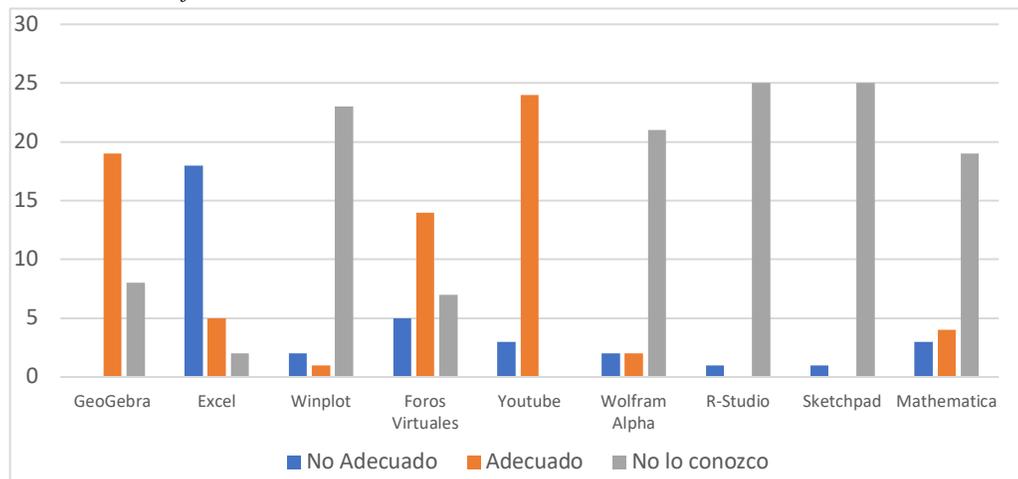
Según tabla 4 y tomando los datos de las opciones DA (muy de acuerdo) y A (de acuerdo), se puede observar que la mayoría de los PMFI expresaron una buena autopercepción de su TK, en cuanto a la asimilación de nuevos conocimientos tecnológicos (TK2, 81,48%) y en la comodidad al utilizar las TIC (TK6, 77,7%), lo que indica que, en general, existe una actitud positiva hacia el uso de la tecnología. Sin embargo, al analizar los datos de las opciones N (ni en desacuerdo ni en acuerdo), D (desacuerdo) y MD (muy en desacuerdo) la mayor parte de los PMFI se encuentran en desacuerdo o indecisos al puntualizar en aspectos relacionados con: experimentar con la tecnología (TK7, 66,67%), poseer los conocimientos técnicos necesarios para usar efectivamente los recursos tecnológicos (TK8, 59, 25%) y para resolver problemas básicos en el ámbito tecnológico (TK1, 48, 14%).

4.1.2. Conocimiento tecnológico pedagógico

La figura 5 ilustra la información relacionada con la unidad de análisis TPK1, respecto a la opinión de los PMFI al seleccionar cuáles softwares son adecuados para la enseñanza y aprendizaje de función cuadrática

Figura 5

Frecuencia absoluta de PMFI que consideran apropiadas las herramientas tecnológicas para la enseñanza de la función cuadrática



Nota. Elaboración propia

Según la información del gráfico anterior, los PMFI expresaron que los softwares más apropiados para considerar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática son YouTube y GeoGebra. Cabe destacar que, aunque YouTube no es un apoyo tecnológico creado específicamente con fines de educativos, casi la totalidad de la muestra lo calificó como una de las mejores opciones para incluirla en la enseñanza y aprendizaje de este tema. Asimismo, se puede observar que gran parte de los participantes no conocen varios softwares de los propuestos. Estos son utilizados en cursos más avanzados de su formación como profesor, lo que podría ser esta la razón principal que explique el desconocimiento de estas herramientas.

En esta misma línea, para analizar la unidad de análisis TPK5 se consultó a los PMFI si pueden sugerir algunas herramientas tecnológicas que no habían sido consideradas anteriormente, que fueran útiles dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática. Se mencionan aplicaciones como PhotoMath, Mathway o Socrative, presentaciones de Power Point y calculadoras graficadoras, sin embargo, 17 participantes no respondieron este ítem.

4.1.3. Conocimiento pedagógico de contenido sobre función cuadrática

A continuación, se presentan elementos del PCK vinculados a los errores que pueden

encontrarse en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática, según el criterio de los PMFI (PCK7).

Para los participantes, durante el aprendizaje de la función cuadrática se presentan cuatro errores específicos: (1) identificación del criterio de la función, y (2) saber cómo cambia la representación gráfica de la función cuadrática cuando se modifican las constantes a , b y c de su criterio (específicamente para realizar la gráfica y aspectos relacionados con la concavidad y monotonía). Además, se menciona que, en ocasiones, (3) se dificulta el análisis de la función cuadrática por el hecho de no saber resolver ecuaciones de segundo grado y agregan que, (4) no se tiene claro el concepto de función.

4.1.4. Conocimiento tecnológico del contenido sobre función cuadrática

Como se mostró en el apartado 4.1.2. los PMFI evidenciaron el conocimiento de ciertos recursos tecnológicos (softwares específicos o herramientas) que podrían utilizarse en el aula para desarrollar el tema de funciones, lo que corresponde a la unidad de análisis TCK1.

Además, para la unidad de análisis TCK5, 26 PMFI afirmaron que utilizan herramientas tecnológicas con acceso a la Web para investigar acerca del contenido matemático que desconocen.

En el cuestionario diagnóstico se solicitó a los participantes considerar si existen ventajas al usar la tecnología en la clase de matemática (TCK6) de donde se obtuvo la siguiente información: (1) facilitan la visualización de objetos matemáticos; (2) son de gran ayuda para la labor docente; (3) permiten captar la atención del estudiante; (4) ayuda a realizar las clases más dinámica; (5) mayor accesibilidad al material de clase; (6) ahorro de tiempo; y, (7) diversificación de metodologías de clase, facilita el entendimiento, puede solventar vacíos si su implementación es adecuada, clarifica conceptos y permite mostrar los errores que se cometen.

Los PMFI también indican desventajas que puede acarrear el uso de apoyos tecnológicos en la mediación de las lecciones (TCK6). Por ejemplo, mencionan el hecho de que la tecnología puede ser un potencial factor de desconcentración para los estudiantes, así como la posibilidad de acceso a este tipo de recursos. También, indican que la dependencia

a la electricidad de la mayoría de los recursos tecnológicos es una limitación considerable (esto puede interpretarse como la necesidad de tener instalación eléctrica adecuada en las aulas, y no necesariamente a la falta de electricidad en el centro educativo). Según su criterio, el uso incorrecto de la tecnología puede entorpecer los procesos de enseñanza y aprendizaje, y que su adecuada implementación está ligada directamente con la capacidad del docente.

De esta forma se evidenció que los PMFI expresan que existen ventajas al utilizar recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas, aunque son conscientes de que el uso de estos apoyos puede presentar algunas desventajas.

4.1.5. Conocimiento tecnológico pedagógico del contenido sobre función cuadrática

Respecto a las formas en que se utilizan las tecnologías en la enseñanza de funciones y cómo estas influyen en el proceso de enseñanza (TPACK3), se obtuvo que 14 participantes indican que la adecuada implementación de GeoGebra o de calculadoras graficadoras permiten mejorar el proceso de visualización y facilitan la comprensión del cambio entre representaciones semióticas. Se puntualiza que estas herramientas permiten comprender cómo varía la representación gráfica al alterar los parámetros del criterio de la función cuadrática.

Según cinco PMFI, una correcta implementación de la tecnología permite que las clases sean más interactivas, ilustrativas y entretenidas, ya que estas favorecen aspectos visuales, auditivos, y ofrecen formas versátiles de analizar la función cuadrática. Agregan que herramientas como YouTube permite repasar, compartir y reforzar el contenido de función cuadrática.

De esta manera, se determinó que los PMFI opinaron que la implementación de las TIC en la enseñanza de funciones puede ser un buen aliado y señalan aspectos donde estas pueden influir. Además, como lo indica P5, reconocen que la adecuada implementación tecnológica depende de la actuación docente.

P5: *“Las tecnologías podrían llegar a solventar vacíos en muchos aspectos, pero sin la guía adecuada podría ser un error”*

4.2. Asignación de tareas matemáticas

La información que se analiza en este apartado se obtuvo por medio del instrumento *Asignación de Tareas Matemáticas*, el cual se construyó con la intención de indagar sobre los diferentes conocimientos de los PMFI respecto al TPACK. A continuación, se describen los conocimientos evidenciados en esta fase de investigación.

4.2.1. Conocimiento pedagógico

Al explorar el conocimiento pedagógico, se solicitó a los participantes seleccionar los aspectos que influyen en el proceso de aprendizaje (PK1). La mayoría de los PMFI (más de 22) consideraron como importantes: 1) la condición del aula (iluminación, ventilación, asientos apropiados, etc.); 2) comunicación asertiva docente-estudiante; 3) comunicación asertiva estudiante-docente; 4) recursos didácticos pertinentes (adecuados y suficientes) y 5) conocimientos del docente sobre la materia.

Junto a lo anterior, los PMFI mencionaron otros aspectos que, según su opinión, influyen de manera relevante en los procesos de enseñanza y aprendizaje (PK1):

- *Actitud*: ocho participantes puntualizaron en aspectos sobre la actitud del docente, actitud del estudiante o de ambos.
- *Ambiente igualitario*: seis participantes mencionaron la igualdad y equidad, y puntualizaron que debe haber presencia de valores. Comentaron que el docente debe ser comprensivo, no permitir ningún tipo de abuso y debe prestar atención a los estudiantes vulnerables.
- *Estrategias de aprendizaje*: para este aspecto 12 participantes consideraron influyente la forma de desarrollar la clase; acentuaron que el trabajo cooperativo, aprendizaje colectivo y colaborativo, participación activa de los estudiantes, comunicación e interacción entre los estudiantes, trabajo individual, tipo de aprendizaje del estudiante y creatividad, afectan este proceso.
- Algunos otros participantes consideraron que la condición física, mental y económica, y las dificultades cognitivas o personales de los estudiantes son aspectos que influyen en este proceso. Además, agregaron que la claridad de la explicación y la duración de la clase también tienen injerencia.

Respecto al PK2 y PK3, se solicitó a los PMFI fundamentar cuáles modelos pedagógicos utilizarían más al enseñar matemática (de forma general). A continuación, se resume su opinión:

- *Trabajo colaborativo*. Fue elegido por ocho participantes; fundamentan que este permite que los mismos estudiantes aprendan entre sí, aclaren dudas sin necesidad de consultar al docente y, a la vez, se fomenta el compañerismo y las habilidades de trabajo en equipo, también ayuda a subsanar las deficiencias en algunos temas.
- *Modelo constructivista*. Según el criterio de cuatro participantes, este modelo permite construir el conocimiento de forma progresiva, desarrollar el pensamiento crítico, reflexivo y creativo. Además, realizarían actividades exploratorias constructivistas para luego formalizarlas en una clase magistral.
- *Resolución de problemas*. Seis participantes justifican que este permite que los estudiantes mejoren su capacidad de razonamiento y relacionar la matemática con la vida cotidiana.
- *Clase magistral*. Para un PMFI la clase magistral es esencial pues, según indica, con otros modelos de aprendizaje no todos los estudiantes participan y que, en ocasiones, al realizar trabajo colaborativo la mayor parte de las tareas se recarga en pocas personas.
- *Modelo cognoscitivista*. Este modelo, según el criterio de tres participantes, permite medir los conocimientos, facilita que los estudiantes descubran los temas que se desarrollan y que estos adquieran sus propios conocimientos;
- *Combinación de modelos pedagógicos*. Para siete participantes, cada estudiante aprende diferente y con la variedad de métodos de enseñanza se tiene más posibilidad de aprender; además, el modelo pedagógico depende del tema que se enseñe, y en algunos temas es factible realizar actividades colaborativas y otros abordarlos desde clases magistrales.

Como se mostró, los participantes reconocieron diversos factores que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y evidenciaron aspectos importantes de las

metodologías que se pueden implementar en la clase de matemática, como los beneficios de utilizar algunos modelos pedagógicos y son críticos con la implementación de estos (PK).

4.2.2. Conocimiento del contenido sobre función cuadrática

En este apartado, se describe la información acerca de los conocimientos sobre la función cuadrática, que manifiestan los participantes, obtenida con este instrumento.

Cinco PMFI brindaron una definición de esta función (CK1) mencionando el dominio, ámbito y criterio. El resto se enfocaron en el criterio de la función o incluyeron elementos no directamente vinculados con la definición, por ejemplo, mencionaron cómo cambia la concavidad dependiendo de valor del coeficiente del término cuadrático y cuántas intersecciones tiene la función con el eje x dependiendo del valor discriminante.

Ahora, cuando se solicitó a los PMFI determinar la expresión algebraica vinculada al criterio de una función que describa la Situación 1; 17 de los participantes lograron determinar correctamente el criterio de la función (CK2).

Situación 1: La entrada a un edificio mide 2,25 metros de alto en el centro, 3 metros de ancho en la base y tiene la forma de un arco parabólico.

Para estudiar la unidad de análisis CK3 se planteó la situación de introducir una caja rectangular de 2 metros de alto por la entrada del edificio descrito en la Situación 1, la cual no puede volcarse por el contenido que lleva y se preguntó sobre cuál es el ancho máximo que debe tener esta caja. Respecto a lo anterior, 11 participantes evidenciaron comprender la situación y lograron determinar el ancho de la caja, correctamente. De lo anterior se deduce que estos 11 PMFI pueden identificar un elemento que es parte del conjunto de imágenes de la función dentro del contexto y logran encontrar la preimagen de esta.

Con el fin de conocer más respecto al CK3, se les presentó la Situación 2.

Situación 2: Una función que modela la altura, en metros, de un balón de beisbol lanzado por un niño tiene como criterio de asociación $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3x + 1,83$, donde x es la distancia horizontal (en metros) desde donde se lanzó el balón.

De los participantes, 17 determinaron correctamente el eje de simetría; la mayoría evidencia conocimiento de que el vértice representa el punto máximo de la función y que en

este cambia la monotonía. A continuación, se presentan algunos comentarios realizados por los participantes.

Figura 6

Participante 9; asignación de tareas matemáticas, ítem 12.

Eje de simetría = $9/2$

El eje de simetría acá cumple la función de determinar en qué punto o en qué momento la bola cambiará la manera de moverse; es decir, antes del eje de simetría podemos decir que crece la altura que toma la bola y después del eje de simetría la decrece la altura que toma la bola.

Figura 7

Participante 24; asignación de tareas matemáticas, ítem 12.

El punto del vértice sería en $(4.5, 8.58)$ el cual su eje de simetría es 4.5, y tiene relación con el problema planteado, puesto se puede ver ese punto como la mitad del recorrido que hizo la pelota en su trayectoria, también en donde la parábola deja de crecer y comienza a descender.

Luego, 18 PMFI determinaron a \mathbb{R} como el dominio de la función y otros dos lo definieron con el intervalo de $[0, 9,57]$ considerando el contexto del problema; además, nueve participantes determinaron el ámbito como $]-\infty, 8,58[$ y otros cuatro lo establecieron con el intervalo de $[0, 8,58]$ al considerar el contexto de la situación.

4.2.3. Conocimiento tecnológico pedagógico

En este apartado se describe cómo los PMFI utilizan los recursos tecnológicos en la enseñanza de la función cuadrática. Se les solicitó representar en GeoGebra las dos situaciones mencionadas (Situación 1 y Situación 2) (TPK6) y crear otra situación para introducir el tema de función cuadrática en secundaria (TPK4), utilizando el mismo software.

En la representación de estas dos situaciones se observó que la mayoría de los participantes evidenciaron conocimiento sobre representar gráficamente una función cuadrática en GeoGebra. En la Situación 2, con el fin de simular el balón, ocho de los participantes etiquetaron el punto como balón, lo resaltaron con otro color, aumentaron su tamaño e inclusive insertaron imágenes de una pelota. Más aun, quince participantes

delimitaron el dominio en el software de manera que la animación de esta situación represente correctamente el contexto, lo que evidencia el conocimiento relacionado con la unidad de análisis TPK6.

Es importante resaltar que, al preguntar directamente por el dominio de la función sólo dos participantes respondieron tomando en consideración el contexto, sin embargo, al solicitar una animación sobre esta misma situación se observó que quince de los PMFI delimitaron el dominio en el software para que esta representación concordara con el contexto.

Respecto al TPK4, se mostró que la mayoría de los participantes utilizaron funciones cuadráticas que modelan adecuadamente la situación que han propuesto, además insertaron imágenes en las animaciones realizadas en GeoGebra. En algunas actividades se crearon instrucciones para dirigir a los estudiantes de secundaria para que, por ellos mismos inserten deslizadores, realicen gráficas y otros. También, seis participantes sugirieron graficar una función cuadrática con parámetros y asignarles deslizadores para guiar la deducción sobre cómo varía la representación gráfica de una función cuadrática al alterar los parámetros de su criterio. A continuación, se presentan algunas animaciones realizadas por los participantes.

Figura 8

Participante 9; asignación de tareas matemáticas, ítem 15a.

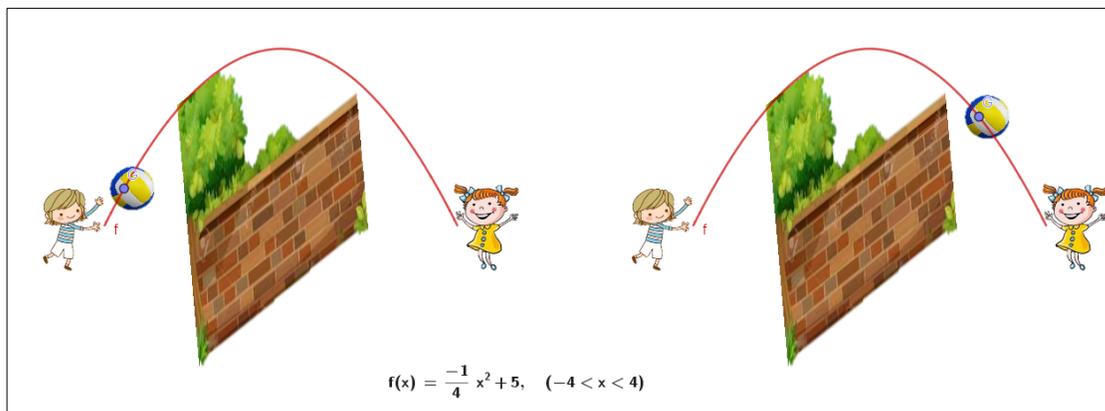
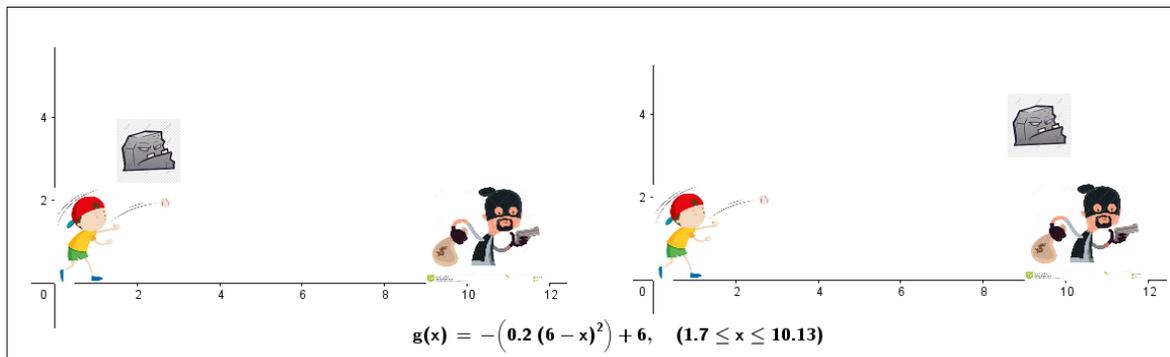


Figura 9

Participante 25; asignación de tareas matemáticas, ítem 15a.



4.2.4. Conocimiento pedagógico del contenido sobre función cuadrática

Este conocimiento se refiere al esfuerzo que hace el docente por hacer accesible el contenido a los estudiantes, así como a las distintas estrategias que pueden ser utilizadas para facilitar su enseñanza. A continuación, se describen las evidencias del PCK de los participantes, obtenidas a través de preguntas dirigidas para conocer aspectos fundamentales de la enseñanza de la función cuadrática.

De la Situación 1 y respecto a la unidad de análisis PCK1, se deduce que 11 PMFI evidenciaron conocimiento al identificar un elemento que es parte del conjunto de imágenes de la función y su respectiva preimagen dentro del contexto que se les presentó. Además, se solicitó interpretar el dominio y ámbito de la función según el contexto de la Situación 2; 12 respondieron que el dominio representa el conjunto de las posibles medidas de la distancia recorrida por el balón (variables reales) y el ámbito representa el conjunto de las posibles medidas de la altura que alcanza la pelota en su trayectoria (lo esperado). Ocho de los participantes solamente escribieron intervalos o valores que consideraron relevantes, por ejemplo, la altura máxima que puede tomar el balón y la distancia a la que cae el balón, omitiendo la interpretación de las respuestas. Otros tres PMFI brindaron respuestas de intervalos o valores numéricos con errores o con interpretaciones incorrectas, por ejemplo:

P1: El dominio es donde se ubica la persona de donde sale la bola

P19: Dominio: $[0, 9,57]$, Ámbito: $[0, 9/2]$

Se deduce que el participante P19 dio un valor incorrecto del ámbito pues tomó la coordenada en x del vértice, y el P1 realizó una interpretación del dominio entendiéndolo como un punto y no como un intervalo.

Por otra parte, el participante P9 consideró que, para poder responder necesitaba elementos del contexto.

P9: *Debemos considerar la altura del niño para saber exactamente cuál es el recorrido de la bola de beisbol, además si el niño está sobre el suelo (tomando este como el eje x) o si está encima de algo*

De lo anterior se aprecia que este participante mostró evidencias de preocuparse porque el componente matemático se ajuste adecuadamente al contexto (PCK1).

En esta misma situación y referidos a la misma unidad de análisis (PCK1), se solicitó a los participantes que ubiquen un punto cualquiera en la trayectoria del balón e interpreten sus coordenadas según el contexto. Tres PMFI simplemente proporcionaron una respuesta numérica sin interpretación y catorce respondieron lo esperado; es decir, que la coordenada en x representa la distancia recorrida por el balón mientras que la coordenada en “ y ” representa la altura que tiene la pelota a esa distancia. Como se muestra a continuación, un participante no realizó la interpretación con un punto específico, sino que describe lo que pasaría para cualquier punto.

P6: *Ambas coordenadas están en el mismo cuadrante (el primero), son positivas, ambas coordenadas aumentan antes de llegar a la coordenada máxima de la gráfica y disminuyen después de esta.*

En esta misma línea, se solicitó a los PMFI determinar el eje de simetría de la Situación 2 y brindar una interpretación adecuada de este (PCK1). Se obtuvo que 17 participantes determinaron correctamente del eje de simetría. Sin embargo, ocho de ellos dieron una interpretación errónea sobre este concepto. Por ejemplo

P1: El eje de simetría es aprox $y=4,5$

P3: El eje de simetría es el que parte a la función en dos funciones iguales

P6: El eje de simetría es el punto (4,5 , 8,58)

P11: *El eje de simetría es 9/2 y significa el punto más alto que llegó la bola durante su trayectoria*

P14: $x=4,5$, es punto máximo que la bola puede obtener

De estas respuestas se puede observar que los participantes P1 y P6 encontraron el valor numérico del eje, aunque hace falta la comprensión correcta de este concepto como una recta vertical. El participante P3 utilizó un lenguaje matemáticamente incorrecto, pero hace referencia a la simetría del eje. Luego, P11 y P14 obtuvieron el valor numérico correspondiente al eje, sin embargo, no evidenciaron una correcta interpretación del contexto. Además, de los participantes que calcularon erróneamente el eje de simetría, dos realizaron una correcta interpretación.

Por otra parte, se planteó a los participantes describir la manera en que se abarca este tema en décimo nivel de secundaria en Costa Rica, lo cual corresponde a la unidad de análisis PCK5.

Se determinó que cinco de los PMFI toman en consideración que las habilidades ligadas al tema de función cuadrática se comienzan a desarrollar desde noveno año, por lo que parten del supuesto de que los estudiantes ya deberían tener conocimientos previos en el tema. Además, 10 de los participantes consideraron que en décimo nivel se aborda este tema superficialmente y hacen alusión a que se enfoca en elementos como las intersecciones con los ejes coordenados, la concavidad de la función, su monotonía y la gráfica. También, seis de los PMFI hicieron referencia al abordaje de este tema a través de situaciones contextualizadas, tres participantes consideraron que se realiza de forma desligada a la realidad, y los otros tres mencionaron que se desarrollan problemas introductorios contextualizados. No obstante, la mitad de los participantes coincidieron en que, generalmente, las clases sobre este tema se median de forma magistral enfocadas en identificar y calcular los elementos de la función cuadrática.

Asimismo, cuatro participantes afirmaron que este tema en secundaria se centra en el análisis de la gráfica a partir de su criterio, es decir, en la relación entre las representaciones

semióticas algebraica y gráfica.

Luego, se propuso a los PMFI que describieran la forma en que ellos desarrollarían las clases sobre este tema como futuros docentes de secundaria (PCK6).

Ahora, 13 de los PMFI consideraron que, para desarrollar una clase de función cuadrática elaborarían una actividad al aire libre o dentro del aula, que involucre un movimiento que se pueda describir con una función cuadrática y pedirles a los estudiantes que analicen ciertos elementos de ese experimento.

Por otro lado, 11 de los PMFI comentaron que para el abordaje del tema en cuestión utilizarían alguna herramienta tecnológica (principalmente GeoGebra) con el fin de mostrar a los estudiantes los elementos que tiene esta función y la relación entre la representación algebraica y la representación gráfica.

Unos pocos participantes (cinco) afirmaron que, primero realizarían una explicación magistral sobre funciones o propiamente de la función cuadrática, para luego asignar prácticas y ejercicios relacionados con las explicaciones dadas.

Aunque todos los participantes expresaron algunas ideas para el abordaje del tema, ninguno de ellos profundizó en las cuatro etapas propuestas por el MEP para el abordaje de los contenidos. No obstante, se debe resaltar que solamente dos de los participantes mencionaron en sus propuestas la introducción con un problema y la formalización de los conocimientos.

En este instrumento, los PMFI tuvieron que realizar una propuesta de actividad con instrucciones para el abordaje de la función cuadrática en secundaria. Se desprende del análisis que, en el diseño de la actividad casi la totalidad de los participantes tratan de favorecer el desarrollo conceptual de esta función (PCK2), en aspectos como: concavidad, intersecciones con los ejes, eje de simetría, vértice, dominio y ámbito, por medio de la visualización de estos en la representación gráfica. Conviene distinguir que diez de los participantes realizaron las preguntas en su actividad refiriéndose únicamente al contexto que proponen, por ejemplo: preguntaron por el punto más alto o la distancia recorrida por un balón, pero no mencionan que esto se refiere al término matemático vértice o dominio.

Por otra parte, una pequeña porción de los PMFI, motivaron el desarrollo

procedimental de este tema en sus actividades (PCK2) pues solicitan la determinación de algunos pares ordenados que pertenezcan a la gráfica de la función dada, encontrar el criterio de asociación de la función que describe la situación y el uso de fórmulas para el cálculo del eje de simetría o procesos que requieren algún cálculo.

En las actividades propuestas por los PMFI, solamente cinco de ellos plantearon las preguntas iniciales de forma básica o sencilla para, posteriormente realizar interrogantes más complejas o con la finalidad de generalizar conceptos (PCK3). En cambio, 10 participantes crearon preguntas que se quedan completamente en lo informal o lo sencillo, otras en las que solamente se requiere de la visualización e interpretación dejando de lado, la profundización de los elementos de la función.

Al indagar si estas actividades exigen utilizar de forma adecuada las diferentes representaciones de la función cuadrática (PCK9), se obtuvo que nueve participantes solicitan establecer explícitamente cómo varía la representación gráfica al alterar los valores de las constantes del criterio de la función. Además, 10 participantes hicieron referencia a la representación gráfica y algebraica de la función, pero en el desarrollo de la actividad excluyeron la representación algebraica y se centran en la gráfica, sin establecer ninguna conexión entre estas. Por el contrario, dos participantes solicitaron realizar cálculos de forma escrita por medio de fórmulas para ser analizados en la representación gráfica.

Al analizar el contexto de las actividades propuestas por los PMFI se encuentran ocho situaciones que involucran varios elementos matemáticos representados en los contextos, de donde se evidencia que los participantes propusieron escenarios no tradicionales y eligieron funciones cuadráticas tomando en cuenta las medidas reales de los objetos (PCK8), específicamente ajustaron las ecuaciones para representar de forma real aspectos como: altura de una pared, altura promedio a la que se coloca un aro de baloncesto, tamaño real de una rampa de patineta, lanzamiento de un balón u objeto y altura promedio de una persona, entre otros.

4.2.5. Conocimiento tecnológico del contenido sobre función cuadrática

En esta sección se exponen las respuestas de los PMFI que tienen relación con el conocimiento tecnológico del contenido sobre la función cuadrática. Como se mencionó en el marco teórico, este subdominio del modelo TPACK se refiere al vínculo que existe al usar

la tecnología para abordar un contenido.

Desde esta perspectiva, se le solicitó a los PMFI que realizaran una representación gráfica, para la Situación 1 y la Situaciones 2, con el uso del software GeoGebra (TCK4), de donde se obtuvieron respuestas muy variadas, pues cada participante lo hizo utilizando su creatividad y conocimientos previos a cerca de este software.

Respecto a la Situación 1, 20 participantes realizaron una representación correcta en el software para describir el contexto dado. Sin embargo, tres de los participantes tuvieron problemas al realizar este ejercicio, pues proporcionaron animaciones que no coinciden con la situación.

Para la Situación 2, todos los participantes realizaron la representación de la parábola que describe el movimiento del balón, con un punto que se mueve sobre ella, simulando la pelota. Se debe desatacar que, dieciséis de los PMFI consideraron un dominio distinto de IR con el fin de adecuar la animación al contexto. De ellos, solamente 10 lo hicieron con el dominio adecuado y seis utilizaron otro dominio.

De lo anterior, se puede observar que la mayoría de los PMFI, utilizaron el software GeoGebra y lograron integrar objetivos vinculados a conceptos matemáticos, además hicieron uso de animaciones de puntos e inserción de imágenes para enriquecer su representación (TCK3).

Luego, para analizar si los participantes logran interpretar los conceptos básicos de la función cuadrática mediante una representación dada en un software (TCK2), se les solicitó responder algunas preguntas adicionales relacionadas con la Situación 1 y Situación 2. En la Situación 1, se agregó la siguiente pregunta:

Si hay que meter una caja rectangular de 2 metros de alto, la cual no puede volcarse por el contenido que lleva, entonces ¿Cuál es el ancho máximo (en metros) que puede tener la caja?

De esto se determinó que, aunque 20 de los PMFI realizaron correctamente la animación en GeoGebra solo 11 lograron interpretar bien esta representación para dar respuesta a la pregunta anterior.

Se solicitó a los participantes interpretar la Situación 2 por medio de la visualización

en el software (TCK2), es decir, relacionar las coordenadas de un punto cualquiera de la gráfica, y se obtuvo que 15 PMFI respondieron correctamente.

Se evidenció que 18 PMFI apoyados en sus representaciones en el software GeoGebra, lograron expresar los elementos de la función en contextos específicos.

4.2.6. Conocimiento tecnológico pedagógico del contenido sobre función cuadrática

En este apartado se indagó sobre la adecuada integración de la tecnología en la enseñanza de la función cuadrática. Para analizar la integración de los tres conocimientos base que propone el modelo TPACK se instó a los PMFI a crear una actividad completa para estudiantes de secundaria y construir las instrucciones que guían esta propuesta. A continuación, se describen algunas evidencias de este conocimiento.

La unidad de análisis (TPACK1) aparece en las actividades propuestas por los participantes P2, P3, P9 y P18 puesto que (1) realizaron una detallada instrucción para que el estudiante pueda trabajar en el software GeoGebra, (2) utilizaron una función que se adecua al contexto que proponen y, (3) formularon preguntas con claridad que permiten relacionar el contexto y el concepto matemático para introducir las nociones de: vértice, monotonía, dominio y punto máximo o mínimo de la función cuadrática. Todos estos a través del apoyo con la visualización en el software (representación gráfica).

Mas aún, estos participantes evidenciaron con claridad el TPACK2 ya que, con su actividad, se promueve la visualización de los elementos de la función cuadrática por medio del software y la manipulación de estos para responder a las preguntas planteadas; los cuatro participantes realizan una animación con elementos tecnológicos adecuados y que no generarían, en primera instancia, incongruencias con el contenido matemático. Los PMFI, demostraron conocimiento en la utilización del software que podría ayudar al estudiante a ubicar los elementos del problema por medio de: inserción de imágenes, cambio del formato y nombre de los objetos, animación de puntos y el uso de comandos para obtener solamente el trozo de función que se requiere representar.

Además, los participantes P17, P21 y P22 demuestran la inclusión de la unidad de análisis TPACK1 en sus actividades pues construyeron ejercicios que permiten evidenciar la

relaciones que existen entre la representación gráfica y la representación algebraica de una función cuadrática y formularon preguntas que guían al estudiante a generalizar la relación entre la concavidad e intersección con el eje “ y ” con las constantes del criterio de esta función. Hay evidencia explícita de que estos PMFI intentaron favorecer la conversión entre representaciones semióticas, utilizado el software GeoGebra. Estos mismos participantes agregaron deslizadores en su animación con el fin de facilitar a los estudiantes el experimento de modificar el valor de las constantes (parámetros) a , b y c del criterio de la función cuadrática. A continuación, se presenta un ejemplo de las propuestas realizadas por los participantes.

Figura 10

Participante 22; asignación de tareas matemática, ítem 15b.

Instrucciones:					
<ul style="list-style-type: none"> ✓ Abra el software GeoGebra y con la herramienta <i>deslizador</i> cree tres deslizadores nombrados a, b, y c respectivamente. ✓ Ingrese en la <i>barra de entrada</i>, la fórmula de la función cuadrática $ax^2 + bx + c$. ✓ Con la herramienta <i>Punto</i> haga clic sobre la función, nombre el punto como A, este punto se desplazará únicamente sobre la función. ✓ Coloque los deslizadores según cada apartado y con la herramienta <i>Elije y mueve</i> desplace el punto A sobre la parábola y responda lo siguiente: 					
¿Cuál es el valor de x?					
a=2, b=-2 y c=-4	a=3, b=-2 y c=-4	a=5, b=1 y c=-2	a=1, b=2 y c=4	a=3, b=0 y c=2	a=1, b=4 y c=0
A= (x, -4,5)	A= (x, -4.33)	A= (x, -2.05)	A= (x, 3)	A= (x, 2)	A= (x, -4)
x=	x=	x=	x=	x=	x=
¿Cuál es el valor de y?					
a=-2, b=-2 y c=-4	a=-3, b=-3 y c=-4	a=-1, b=2 y c=-4	a=-1, b=1 y c=-1	a=-2, b=4 y c=5	
A= (-0.5, y)	A= (-0.5, y)	A= (1, y)	A= (0.5, y)	A= (1, y)	
y=	y=	y=	y=	y=	
Según el ejercicio anterior, orientese para responder las siguientes interrogantes:					
1. Si a es positivo, las funciones son cóncava hacia _____					
2. Si a es negativo, las funciones son cóncava hacia _____					
3. Por definición, en la función cuadrática si existen las constantes a, b, c $\in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, mueva los deslizadores y analice que pasa si en la función cuadrática $a=0$					

4. Las constantes b y c pueden ser igual a 0 _____					
5. En las funciones cuadráticas existe el vértice (punto máximo o mínimo), según la concavidad, si $a < 0$ tiene un _____ mientras que si $a > 0$ tienen un _____					

En síntesis, se puede deducir que los participantes mencionados en esta sección lograron integrar el contenido matemático, tecnología y pedagogía en la planificación de su actividad para la enseñanza de función cuadrática y consiguieron conectar lo que expresaron

como sus creencias sobre la utilidad de estos recursos y la propuesta que realizaron. Incluso, usaron representaciones semióticas para abordar los conceptos relacionados con esta función, a través del uso de GeoGebra. El resto de los PMFI no evidenció una conexión completa entre los tres conocimientos (tecnológicos, pedagógicos y de contenido sobre función cuadrática) aunque, como se mostró, sí realizaron algunas actividades que pudieron ser explicadas mediante las unidades y las categorías de análisis planteadas en este estudio.

4.3. Reflexión sobre el análisis de instrucciones

Una vez finalizado el instrumento *Asignación de Tareas Matemáticas* se solicitó a los PMFI compartir las actividades e instrucciones por medio de su participación en un foro, a cada participante se le asignó realizar la actividad de uno de sus pares y reflexionar sobre la calidad de esta propuesta. Luego los PMFI compartieron sus opiniones justificadas por medio de un comentario a la propuesta de su compañero. A continuación, se describen los conocimientos del modelo TPACK evidenciados por los PMFI a través del foro.

4.3.1. Conocimiento tecnológico pedagógico

De los participantes, 15 evidenciaron su conocimiento tecnológico pedagógico en los comentarios realizados. Además, 8 de estos PMFI mencionan aspectos sobre la forma en que la tecnología influye en el aprendizaje de la función cuadrática (TPK2), específicamente P6 afirmó que GeoGebra permite visualizar los conceptos relacionados con esta función. Por su parte, reflexionó a partir de las instrucciones de su compañero, que este software permite: motivar a los estudiantes e implementar actividades para explorar este tema, más aún, P17 sugirió a su compañero profundizar más en el contenido matemático, ya que esta herramienta tecnológica le facilita al estudiante los procesos de análisis y deducción de algunas características de la función cuadrática y P25 aseguró que es necesario guiar al estudiante en el manejo del software para que este puede centrarse en desarrollar las habilidades del conocimiento matemático.

Respecto a esta misma unidad de análisis los participantes P1, P2, P7, P15 y P20 realizaron recomendaciones sobre la inclusión de imágenes, tanto en la ilustración del problema como en las instrucciones para guiar al estudiante a animar la situación en GeoGebra.

P1: ... mostrar los pasos con imágenes porque los chicos no suelen tener el dominio de aplicaciones matemáticas como el GeoGebra

P20: Considero importante que, trates de poner una imagen relacionada[sic] al problema, pues sería una gran ayuda para el estudiante

En particular, el participante P20 analizó una actividad sobre el lanzamiento parabólico de una piedra y recomendó a su compañero animar el punto que representa la roca en el problema planteado.

También, relacionado con la unidad de análisis (TPK2) los participantes P1, P7 y P20 mencionaron que la tecnología influye en diferentes aspectos. Por ejemplo, P7 y P20 sugirieron que la incorporación de herramientas tecnológicas permite integrar muchos aspectos de la función cuadrática en una sola actividad e incentivar la investigación sobre las aplicaciones de este tema en diversas áreas. Además, P20 señaló la facilidad con la que se pueden realizar animaciones de los contextos que se presentan en las propuestas de aprendizaje.

Asimismo, 7 de estos PMFI adoptaron un pensamiento crítico sobre la forma de utilizar la tecnología en el aula (TPK3); P1 le recomienda a su compañero incluir imágenes para guiar a los estudiantes en el uso de GeoGebra. Otro ejemplo es P18 que, al reflexionar sobre la actividad de su compañero en la que se usa la función condicional “SI” de GeoGebra, comentó que en las instrucciones de la actividad se debe indicar cuál de las dos funciones que ofrece el software se debe utilizar. Más aún, P19 sugiere que se debe indicar al estudiante la forma de restringir el dominio en GeoGebra. En esta misma línea, P4 y P8 recomendaron elaborar instrucciones más específicas con el fin de guiar al estudiante en procesos como inserción de deslizadores y graficar funciones.

Respecto a esta misma unidad de análisis y al conocimiento matemático que se puede abordar usando el software, el participante P22 agregó que es necesario orientar al estudiante para mover los deslizadores en GeoGebra, ya que el hecho de moverlos sin un objetivo podría entorpecer el proceso para deducir cómo varía la concavidad dependiendo de valor del coeficiente del término cuadrático. Asimismo, P27 le sugirió a su compañero cambiar la

animación del punto por un deslizador, pues este último mejora la calidad de la representación.

Es preciso tener presente que, los PFMI se enfocaron en los elementos que más llamaron su atención en el momento de reflexión sobre la actividad que se les asignó. Por esta razón, aunque los comentarios de 10 y 18 participantes no tuvieron el alcance para ser asociados con las unidades de análisis TPACK2 y TPACK3 respectivamente, esto no implica que existe deficiencia en estos conocimientos.

4.3.2. Conocimiento tecnológico pedagógico del contenido sobre función cuadrática

A continuación, se muestra en el conocimiento TPACK evidenciado por los participantes en la *Reflexión sobre el Análisis de Instrucciones*. Sólo tres participantes realizaron comentarios en el foro que permitieron vincular su conocimiento con la unidad de análisis TPACK1, para ejemplificar este conocimiento se tomó el siguiente ejemplo:

P20: *1) Trate de poner el título del tema a desarrollar, esto sirve de encabezado y denota una mayor formalidad en la estructura de cualquier material o documento educativo. 2) Cuida la redacción, ponga las sangrías pertinentes y trate de no usar palabras que se escuchen redundantes, esto último lo puedes observar en el primer párrafo, cuando escribiste primero fin y luego la palabra finalidad. 3) Es muy importante que enumeres las preguntas, o que exista una viñeta, indicando que estás separando el planteo del problema, sobre las preguntas, todo esto es para no confundir al lector, quien realiza la actividad. 4) Considero importante que, trates de poner una imagen relacionada al problema, pues sería una gran ayuda para que el estudiante, pueda relacionar con mayor facilidad el problema planteado y no olvides dejar un espacio después de cada pregunta para que el estudiante escriba su respuesta. 5) Puedes también integrar otros aspectos de la función cuadrática, en este ejercicio, por ejemplo, en qué intervalo crece o decrece y el eje de simetría. 6) Como última sugerencia, te propongo que, en otra ocasión, trates de animar el punto en GeoGebra que simboliza a la roca de tu problema ...*

De lo anterior, se resalta que este participante evidenció cierto conocimiento pedagógico general ya que reflexionó sobre la calidad del formato, la presentación del documento y lo que esto podría involucrar en el momento de ejecutar. Luego, en el punto tres reflexionó que el orden del documento puede influir en su comprensión. Mostró su conocimiento pedagógico del contenido al sugerir que la inclusión imágenes ayuda al estudiante a relacionar la situación con el contenido matemático. En cuanto al conocimiento TPACK, este participante propone animar el punto para que la representación del software permita una mejor visualización del contexto. De esta forma se evidencia que este participante dirige sus comentarios para realizar una integración eficaz sobre matemática, tecnología y pedagogía (TPACK1).

Conviene especificar que, las evidencias brindadas en los comentarios del foro no permitieron vincular sus conocimientos con las unidades de análisis TPACK2, TPACK3, TPACK4 y TPACK5 que se asocian al conocimiento TPACK y que inicialmente se esperaban encontrar en los comentarios. Es importante resaltar que, ante la falta de evidencias sobre estas unidades de análisis no se puede asegurar que los PMFI carecen de estos conocimientos.

A lo largo de la Sección 4.3 se han detallado los conocimientos del modelo TPACK que evidenciaron los participantes en esta fase de la investigación. En general, se mostró que los PMFI reflexionan que en una actividad los aspectos relacionados con el formato pueden influir en el proceso de enseñanza y aprendizaje (redacción, formalidad, ortografía, y originalidad); también, se determinó que algunos participantes poseen un conocimiento técnico del software GeoGebra. Además, se evidenció que los PMFI consideraron que la tecnología influye en el proceso de aprendizaje y mencionan que facilita: 1) visualizar el concepto; 2) motivar a los estudiantes, 3) implementar actividades exploratorias y 4) profundizar en el conocimiento matemático.

Para terminar, se hizo evidente que los PMFI hacen referencia a aspectos relacionados con: (1) inclusión de imágenes dentro de las instrucciones para orientar a los estudiantes; (2) animación de elementos en la representación realizada en el software y (3) las ventajas que tiene la inclusión de las TIC en el ámbito educativo.

5. Capítulo V: Conclusiones, limitaciones y recomendaciones

En este capítulo se muestran las principales conclusiones derivadas de esta investigación. Se han ordenado de acuerdo con los objetivos planteados en el primer capítulo. También, como conclusiones abiertas, se presentan las limitaciones afrontadas en el desarrollo del estudio y, se señalan diversas recomendaciones dirigidas a la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, a los participantes y algunas sugerencias para futuras investigaciones.

5.1. Conclusiones

A continuación, se presentan las principales conclusiones de esta investigación ordenadas de acuerdo con los objetivos específicos que guiaron el trabajo.

Se obtuvo una serie de indicadores que permiten el estudio del conocimiento docente a través del modelo TPACK, que es uno de los aportes más importantes de este trabajo a la comunidad investigativa, logrando la consecución del primer objetivo específico.

Como conclusión del segundo objetivo específico, en este trabajo se logró la creación de un instrumento innovador que permite analizar ampliamente y desde tres perspectivas (autopercepción, ejecución y práctica reflexiva) los conocimientos de los futuros docentes que propone el modelo TPACK, desde el contenido sobre la función cuadrática y esto aporta en gran medida a la investigación en Educación Matemática.

Para detallar las conclusiones del tercer y último objetivo específico se utilizó la información recolectada gracias al primer y segundo objetivo. A continuación, se presentan las principales descripciones de cada conocimiento propuesto por el modelo TPACK.

Conocimiento tecnológico

Se determinó que la mayoría de los participantes tienen una adecuada actitud al utilizar la tecnología, sin embargo, poseen algunas inseguridades sobre la implementación de las TIC con fines educativos. Según Kartal y Çinar (2018) estas inseguridades pueden cambiar positivamente a experimentar con la tecnología, se puede esperar que los participantes modificaran estos pensamientos durante el desarrollo del curso MAC404 Recursos Informáticos.

Se logró concluir que los participantes poseen los conocimientos básicos para

manipular software de geometría dinámica como GeoGebra y plataformas educativas como Moodle, que según Cabers et al. (2014) son elementos fundamentales en la formación inicial de profesores de matemática. Sin embargo, la información que se obtuvo al reflexionar sobre la implementación del software en una actividad para la enseñanza de función cuadrática fue poco clara e infundada.

Conocimiento pedagógico

Una conclusión sobre este conocimiento es que estos PMFI son conscientes de la importancia que tiene desarrollar e incluir habilidades pedagógicas durante su formación inicial, pues indicaron que el acondicionamiento del espacio de clase, la comunicación entre los actores del proceso educativo, los recursos didácticos utilizados y los conocimientos del docente son elementos que tienen injerencia dentro de las clases de matemática, lo que se relaciona con lo propuesto por Azcárate (1998) sobre la formación inicial de profesores.

Además, los PMFI conocen aspectos vinculados con la comprensión de las relaciones que existen entre el profesor, el contexto y el estudiante, lo cual coincide con la tendencia de formación de profesores centrada en el estudiante (Aramburuzabala et al., 2013). En esta misma línea, los PMFI mencionaron las metodologías con las que más se identifican para desarrollar una clase de matemática, de donde se determinó que los participantes conocen de estrategias para el desarrollo de la clase que buscan enfatizar en la modelización, construcción y resolución de problemas, que son procesos propios del desarrollo del pensamiento matemático según Font (2008).

Conocimiento del contenido sobre función cuadrática

Frente a la evidencia recabada en este trabajo se puede asegurar que la mayoría de los participantes comprenden las diferentes características de la función cuadrática, tienen la capacidad de resolver problemas relacionados con este tipo de función y saben manipular algebraicamente la información para determinar diferentes elementos como: dominio, ámbito, intersecciones con los ejes coordenados, eje de simetría, vértice, criterio de asociación, entre otros. Aunque los participantes saben determinar estos elementos, se les dificulta delimitarlos de manera que tengan sentido en un contexto específico, esto lo mencionan Zúñiga y Melba (2009) como un error frecuente en este tema.

De esta misma forma, se concluyó que la mayoría de los participantes presentan errores al definir la función cuadrática, ya que se centran en su criterio de asociación dejando de lado el dominio y el codominio, que es un error frecuente identificado por Elia et al. (2008) y Díaz (2008).

Conocimiento tecnológico pedagógico

En la actualidad existe una vasta gama de herramientas útiles dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, los participantes conocen algunas de ellas y, en general, señalaron que YouTube y GeoGebra son los softwares más apropiados para incluir en los procesos educativos. Sin embargo, se evidenció desconocimiento de otros softwares especializados que son utilizados comúnmente en la enseñanza de la matemática; es posible que durante el resto de su formación desarrollen habilidades para el manejo de estas herramientas.

A pesar de que, los participantes tienen cierto dominio del software GeoGebra, según Gómez-Chacón y Joglar (2010), esto no es evidencia suficiente de que los PMFI puedan integrar asertivamente la tecnología dentro de las clases de matemática.

En la evidencia obtenida se determinó que al plantear una actividad los PMFI buscan un acercamiento de los conceptos matemáticos por medio de la contextualización y eventualmente solicitarían a los estudiantes de secundaria manipular el software, lo que un proceso recomendado por Haung y Zbiek (2016).

Se puede concluir que los PMFI son conscientes de que el uso herramientas tecnológicas influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje ya que los participantes expresaron explícitamente que además de incentivar la creatividad e independencia académica de los estudiantes, la inclusión de las TIC dentro de las clases facilita la comprensión de conceptos relacionados con el tema, lo que coincide con las ideas de Alfonzo (2012). Asimismo, los participantes indicaron que es de suma importancia guiar al estudiante de secundaria en el manejo del software, con el fin de centrarse en desarrollar las habilidades del conocimiento matemático, idea que es fundamentada con uno de los aportes de Önal (2016), respecto al TPK.

Aunque los participantes evidenciaron ciertos conocimientos relacionados con el

TPK, hubo muy poca o nula evidencia sobre algunos aspectos de este conocimiento. Por ejemplo, en ninguna de las actividades propuestas por los PMFI trataron de promover actividades en plataformas virtuales que facilitaran el aprendizaje del tema. Asimismo, los comentarios sobre el uso de las herramientas tecnológicas en clase fueron muy superficiales, de donde se puede deducir que se debe mejorar las competencias de reflexión crítica sobre uso de la tecnología como herramienta didáctica y de esta forma fortalecer la integración entre el conocimiento tecnológico y pedagógico.

Conocimiento pedagógico del contenido sobre función cuadrática

Se determinó que los participantes conocen algunas dificultades en el abordaje de este tema; la dificultad más señalada es la falta de conexión entre las representaciones semióticas de la función cuadrática, esto concuerda con Even (1990) y Duval (1993). También mencionan limitaciones que coinciden con las propuestas por Zaslavsky (1997) (citado por González et al., 2013), Hu, Son y Hodge (2018) y Elia et al. (2008) respecto al estudio de este tipo de funciones.

Una conclusión de este trabajo es que, aunque la mayoría de los participantes saben realizar los procedimientos algebraicos para resolver un problema relacionado con función cuadrática, lo cierto es que gran parte de los PMFI manifiesta errores al momento de interpretar elementos como: dominio, ámbito, eje de simetría o un par ordenado en el contexto del problema, lo que puede relacionarse con que generalmente los profesores enseñan técnicas para resolver problemas de forma mecanizada, lo que provoca dificultades en los estudiantes (Prada-Núñez et al., 2017). Esto podría tener varias explicaciones como, por ejemplo, que los participantes estén acudiendo a los conocimientos adquiridos en su formación en secundaria y no a los que les han sido provistos en su carrera. No obstante, esta hipótesis no podría ser comprobada o refutada en esta investigación.

Por otro lado, los participantes reflejan su pensamiento crítico sobre la forma en que se desarrollan las clases, ya que la mayoría opina que el abordaje de la función cuadrática en décimo nivel de secundaria se realiza superficialmente, es decir, se enseña de forma magistral y se enfocan en identificar y calcular los elementos de la función cuadrática. Muy pocas veces se desarrollan problemas introductorios contextualizados y creen que las clases se centran en la relación entre las representaciones semióticas algebraica y gráfica, lo que coincide con

Artigue (1998).

Algunos PMFI señalan que utilizarían metodologías con un fuerte apoyo tecnológico y otros indican que implementarían actividades que requieran que el docente conozca el contenido y la utilidad del tema, las cuales encajan con las tendencias emergentes en la Educación Matemática propuestas por Font (2008). Esto muestra que dentro de los cursos de la Carrera de Bachillerato y Licenciatura de la Enseñanza de la Matemática se están realizando esfuerzos por desarrollar en los estudiantes herramientas para enfrentar las exigencias del mercado laboral actual.

Se determinó que, la mayoría los PMFI mencionan la representación algebraica y gráfica de la función cuadrática en el diseño de la actividad, pero en una posible ejecución, estas actividades centran el estudio en una de las dos representaciones y no permite comprender la relación entre ellas.

De la información analizada sobre el PCK se concluyó que la mayoría de estos profesores en formación aún no tiene la capacidad para plantear actividades y crear instrucciones que guíen con detalle la ejecución de las tareas y se les dificulta plantear preguntas para hacer accesible el contenido, por lo que es necesario profundizar aún más en el desarrollo de este conocimiento en los siguientes niveles de su formación.

Conocimiento tecnológico del contenido sobre función cuadrática

El análisis realizado indicó que los participantes del estudio son conscientes de que el uso de las herramientas tecnológicas para la enseñanza del contenido de función cuadrática ofrece ventajas para el docente, el estudiante y hace más accesible el contenido matemático, sin embargo, saben que esta implementación tecnológica establece retos para las instituciones, docentes y estudiantes.

Además, se determinó que los PMFI comprenden que el uso incorrecto de la tecnología puede entorpecer los procesos de enseñanza y aprendizaje, y que esta implementación está directamente ligada con la capacidad del docente, idea señalada por Torres y Gilbert (2010) y Cabero y Marín (2014).

La mayoría de estos profesores en formación tienen las habilidades básicas para realizar representaciones con fines educativos en el software GeoGebra, por medio de

inserción de imágenes, animación de puntos, restricción del dominio, entre otros. Se evidenció que, al apoyarse en la representación del software los PMFI mejoran la interpretación de los elementos de la función en un contexto, aun así, una porción considerable de los participantes mostró dificultad para realizar esta interpretación, obstáculo mencionado por Even (1990) y Duval (1993) sobre la conversión de representaciones semióticas.

Conocimiento tecnológico pedagógico del contenido sobre función cuadrática

Se concluyó que los participantes consideran que la importancia de enseñar función cuadrática usando adecuadamente el software GeoGebra es que facilita una idea visual del contenido que se estudia, de una forma innovadora y atractiva para el estudiantado, lo que se ajusta a uno de los aportes brindados en la investigación de Kirikçilar y Yildiz (2018). Además, los participantes son conscientes de que, para generar una implementación adecuada de las herramientas tecnológicas, estas deben utilizarse en el momento oportuno y con un objetivo previamente definido, idea que coincide con lo expuesto por Belfiori (2014).

Por ejemplo, se logra concluir que la mayoría de los participantes no favorecen la conversión entre representaciones semióticas utilizando el software GeoGebra, proceso de gran importancia según Hit (2000) y Duval (2006). Solo una pequeña porción de participantes plantea su actividad de manera que se establezcan relaciones de la representación gráfica y la algebraica.

Según el análisis realizado se determinó que pocos PMFI logran integrar de manera eficaz matemática, tecnología y pedagogía en la planificación de una actividad. Sin embargo, aquellos que alcanzaron cierto nivel de integración entre los tres conocimientos (tres participantes) dirigen correctamente las instrucciones, puntualizando en detalles del manejo del software y en un adecuado abordaje del contenido matemático, este último coherente con el contexto.

Se concluyó que la mayoría de los participantes aún no han desarrollado un nivel adecuado de reflexión crítica sobre la integración de los conocimientos del modelo TPACK, pues los comentarios fueron superficiales y carentes de justificación. Esta carencia era relativamente esperable dado que se encuentran en su segundo año de formación, es necesario

resaltar que su nivel de formación no resta importancia al estudio, ya que diversos autores como Shulman (1987) y Barrantes (2003) mencionan que el profesor debe reflexionar sobre su quehacer y autores recientes como Seckel y Font (2020) apoyan el desarrollo y la evaluación de estas competencias reflexivas en la formación inicial del profesorado. Relacionado con lo anterior y basados en las ideas de Kirikçilar y Yildiz (2018) y McBroom (2011), en este estudio no se esperaba que los participantes evidenciaran experticia sobre el conocimiento TPACK, ya que estos autores aportan que en la formación temprana es difícil realizar una adecuada integración de los conocimientos que propone este modelo.

Así, la principal conclusión de este trabajo es que aun cuando los estudiantes ya han tenido contacto con cursos relacionados con pedagogía general, uso de recursos tecnológicos y han estudiado el contenido matemático no se logra determinar que sus conocimientos les permitan tener una visión completa sobre la integración de tecnologías como recurso didáctico en la enseñanza de las funciones.

5.2. Limitaciones

Dentro de las limitaciones presentes en el desarrollo de esta investigación es relevante mencionar que debido a la emergencia Nacional provocada por el COVID-19, se aplazó la aplicación de los instrumentos *Asignación de Tareas Matemáticas* y *Reflexión sobre el Análisis de Instrucciones* de abril de 2020 a junio de este mismo año. Por esta misma situación el instrumento *Asignación de Tareas Matemáticas* se adaptó a una versión virtual en la plataforma Moodle de la Universidad Nacional. En consecuencia, se perdió información pues no se pudo analizar los procedimientos que llevaron a los respectivos resultados. Relacionado a esto, en el instrumento *Cuestionario Diagnóstico* aplicado presencialmente se obtuvo respuesta de todos los estudiantes matriculados en el curso MAC404 Recursos Informáticos (31 participantes), mientras que en la aplicación virtual de los instrumentos no se contó con la participación total de estos estudiantes (cuatro estudiantes no participaron).

Una de las limitaciones fue la falta de información específica que relacione el contenido de funciones con el modelo TPACK, ya que la mayoría de las investigaciones consultadas como referente bibliográfico se centran en área de Geometría.

Otra limitación que se presentó fue el hecho de no existir una investigación previa o un diagnóstico sobre los conocimientos TPACK de los profesores de matemática en

formación en la Universidad Nacional. Por dicha razón, este estudio se limita a describir los conocimientos de estos profesores en formación y no se puede validar los resultados por medio de una triangulación con resultados obtenidos en investigaciones previas de la universidad.

5.3. Recomendaciones

Como resultado de este trabajo y tomando en cuenta la revisión teórica realizada en el desarrollo de este, se surgieron las siguientes recomendaciones.

5.3.1. Para la Escuela de Matemática

Las recomendaciones dirigidas a la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional son:

- Incluir o profundizar en ejercicios sobre la práctica reflexiva del docente desde el modelo TPACK en la formación inicial de profesores.
- Valorar y analizar si el curso MAC404 Recursos Informáticos vincula los conocimientos tecnológicos que en este se desarrollan con el conocimiento didáctico necesario para implementación de las TIC. Aunque en el curso se evidenció este vínculo, el programa del curso no lo explica de forma evidente.
- Analizar si en algún momento del proceso de formación de los profesores de matemática se evalúa que estos puedan integrar los conocimientos pedagógicos, tecnológicos y de contenido matemático.
- Tratar de formalizar dentro del currículo actual aspectos sobre el conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) y Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK), para que los profesores en formación sean conscientes de la importancia de desarrollar las habilidades vinculadas a estos conocimientos. Es decir, que se haga evidente la necesidad de una integración.

5.3.2. Para los estudiantes

- Considerar en el diseño de tareas matemáticas los conocimientos que propone el modelo TPACK para mejorar la integración de las herramientas tecnológicas en su futura labor docente.

- Profundizar en el diseño de instrucciones de manera que, en estas se especifiquen todos los aspectos que un estudiante de secundaria necesite para el manejo de software y el entendimiento del contenido matemático.
- Profundizar en la reflexión de su futura práctica docente con el fin de mejorar su proceso de mediación de clases al integrarse al campo laboral.
- Indagar como la tecnología puede ser usada de manera inteligente para evitar los errores que comúnmente se presentan en el estudio de la función cuadrática.
- Aprovechar el área de didácticas específicas que son los cursos donde se pretende incrementar la comprensión de la vinculación del contenido matemático, los recursos tecnológicos y su enseñanza.
- Aprovechar los conocimientos nuevos que se abarcan en cursos superiores para tratar de establecer relaciones y vínculos con lo que se desarrolla en secundaria.

5.3.3. Para futuras investigaciones

Dentro del que hacer investigativo en la educación matemática, se sugiere:

- replicar este estudio de manera longitudinal en los distintos niveles de formación en las carreras de Enseñanza de la Matemática, con el fin de conocer la evolución de los conocimientos TPACK del profesorado durante su formación. Esto permite evaluar si se satisfacen las exigencias sobre la integración de los conocimientos pedagógicos, tecnológicos y matemáticos que propone el MEP en sus ejes transversales para secundaria;
- realizar estudios similares a este, abordando otras áreas del conocimiento matemático (números, relaciones y álgebra, estadística y probabilidad), ya que en la literatura revisada durante la indagación teórica mostró que las investigaciones se han centrado principalmente en el análisis del TPACK desde el área de Geometría;
- replicar este estudio tomando una muestra de profesores en formación de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional, que se encuentren en niveles superiores al utilizado en esta investigación, para indagar si las debilidades encontradas en este trabajo se rectifican con el avance

de su formación;

- diseñar y ejecutar un estudio relacionado con el modelo TPACK donde se utilice una muestra de docentes que se encuentren laborando en educación secundaria; esto con la finalidad de conocer el nivel de implementación del TPACK que realizan los docentes dentro de sus clases.

6. Referencias

- Alfonzo, Z. (2012). Didáctica de las funciones lineales y cuadráticas asistidas con computadora. *Revista Didasc@lia: Didáctica y Educación*, 3(3), 2224-2643. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4230477>
- Alpízar, M. (2019). *Teoría, ejercicios y algunas soluciones. Nociones básicas de funciones.*(Documento inédito). Heredia: Costa Rica.
- Anderson, A., Barham, N., y Northcote, M. (2013). Using the TPACK framework to unite disciplines in online learning. *Australasian Journal of Educational Technology*, 29(4), 549-565. <https://ajet.org.au/index.php/AJET/article/view/24/610>
- Andréu, J. (2002). Las técnicas de análisis de contenido: Una revisión actualizada. *Fundación Centro de Estudios Andaluces*, 10(2), 1-34. https://www.academia.edu/download/39429166/LAS_TECNICAS_DE_ANALISIS_DE_CONTENIDOS.pdf
- Aramburuzabala, P., Hernández-Castilla, R., y Ángel-Uribe, I. C. (2013). Modelos y tendencias de la formación docente universitaria. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 17(3), 345-357. <https://www.redalyc.org/pdf/567/56729527020.pdf>
- Arévalo-Duarte, M. A., García-García, M. Á., y Hernández-Suárez, C. A. (2019). Competencias TIC de los docentes de matemáticas en el marco del modelo TPACK. *Civilizar*, 19(36), 1-27. <http://dx.doi.org/10.22518/usergioa/jour/ccsh/2019.1/axx>
- Arráez, M., Calles, J., y Moreno de Tovar, L. (2006). La Hermenéutica: una actividad interpretativa. *SAPIENS*, 7(2), 171-181. <http://www.redalyc.org/pdf/410/41070212.pdf>
- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 1(1), 40-55. <http://funes.uniandes.edu.co/9584/>

- Azcaráte, M. (1998). La formación inicial del profesor de matemáticas: análisis desde la perspectiva del conocimiento práctico profesional. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, (32), 12-132. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=117983>
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <http://dx.doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido* (2ª. edición). Aka.
- Barrantes, H. (2003). Formación del profesorado en matemáticas en Costa Rica Balance y Perspectivas. *Uniciencia*, 20(1), 77-88. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5381429.pdf>
- Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras* [Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática]. Universidad de Granada. https://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis_dir/ver_detalle/5501/
- Belfiori, V. (2014). Uso del marco tpack por alumnos de un profesorado de matemática. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1733-1740). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. <https://funes.uniandes.edu.co/6059/1/BelfioriUsoDelMarcoALME2014.pdf>
- Breda, A., Font, V., y Lima, V. M. (2015). Propuestas de incorporación de contenidos matemáticos de nivel superior en la educación básica: un estudio de los trabajos finales de curso del Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 8(3), 136-148. <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/3189>
- Cabero, J., y Barroso, J. (2016). ICT teacher training: a view of the TPACK model/Formación del profesorado en TIC: una visión del modelo TPACK. *Cultura y educación*, 28(3), 633-663. <https://doi.org/10.1080/11356405.2016.1203526>
- Cabero, J., y Marín, V. (2014). Miradas sobre la formación del profesorado en tecnologías de información y comunicación (TIC). *Enl@ce: Revista Venezolana de Información*,

Tecnología y Conocimiento, 11(2), 11-24.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5101939>

- Cabero, J., Marín, V., y Castaño, C. (2015). Validation of the application of TPACK framework to train teacher in the use of ICT. *@tic revista d'innovació educativa*, 0(14), 13-22. <https://doi.org/10.7203/attic.14.4001>
- Cáceres, M., Lara, L., Iglesias, C. M., García, R., Bravo, G., Cañedo, C., y Valdés, O. (2003). La formación pedagógica de los profesores universitarios. Una propuesta en el proceso de profesionalización del docente. *Revista iberoamericana de educación*, 33(1), 1-15. <https://doi.org/10.35362/rie3312900>
- Cabero, J., Barroso, J., Cadena, A., Castaño, C., Cukieman, U., Lorente, M., y Pérez, R. (2014). *La formación del profesorado en TIC: modelo TPACK*. Universidad de Sevilla.
https://www.researchgate.net/publication/326892943_La_formacion_del_profesora_do_en_TIC_modelo_TPACK
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8*. (pp. 2985-2994). Middle East Technical University and ERME.
- Carter, N., Bryant-Lukosius, D., DiCenso, A., Blythe, J., y Neville, A. J. (2014). The Use of Triangulation in Qualitative Research. *Oncology Nursing Forum*, 41(5), 545-547.
<http://10.1188/14.ONF>
- Cejas, R., Navío, A., y Barroso, J. (2016). Las competencias del profesorado universitario desde el modelo TPACK (conocimiento tecnológico y pedagógico del contenido). *Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación*, (49), 105-119.
<https://recyt.fecyt.es/index.php/pixel/article/viewFile/61717/37727>
- Córdoba, L., Díaz, M., Haye, E., y Montenegro, F. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. En Y. Morales y A. Ramírez (Eds.), *I CEMACYC Congreso de Educación*

- Matemática de América Central y El Caribe.* (pp. 1-13). CEMACYC.
<http://funes.uniandes.edu.co/4072/>
- Cuesta, A. (2007). *El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica* [Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales]. Universidad Autónoma de Barcelona. <https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2007/tdx-0123108-170452/acb1de1.pdf>
- Dewey, J. (1910). *How we think*. D. C. HEATH y CO., PUBLISHERS.
<https://www.gutenberg.org/files/37423/37423-h/37423-h.htm>
- Díaz, J., (2008). El concepto de función: investigaciones y enseñanza. En E. Rodríguez, S. Sosa, F. Luque, C. Robles y M. Urrea (Eds.), *Memorias de la XVIII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*. (pp. 35-40). Editorial Universidad de Sonora.
http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/Archivos/XVIII/Memorias_XVIII.pdf#page=45
- Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 25-41). Kluwer Academic Publisher.
<https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1>
- Dreyfus, T., y Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(5), 360-380.
https://www.jstor.org/stable/749011?casa_token=xdPnveBS-KAAAAAA:PJB2vN4qeE_Ke8qLkBVfVz2LN1eSaJ9O20mUQUkS52bT7uCQNq3UytLAvwewHHv0-QH16ZAnABlIejep8WRwkvxEQraV4xL6NJ-1ISbVd-WiXeRZa61sgyseq=1#metadata_info_tab_contents
- Duval, R. (1993). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37-65.
<http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/ST/IST93004/IST93004.pdf>

- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1984436>
- Elia, I., Panaoura, A., Gagatsis, A., Gravvani, K., y Spyrou, P. (2008). Exploring Different Aspects of the Understanding of Function: Toward a Four-Facet Model. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 8(1), 49–69. <https://doi.org/10.1080/14926150802152277>
- Escuela de matemática, Universidad Nacional [UNA]. (2020). *Curso: MAC-404 RECURSOS INFORMÁTICOS [Programa del Curso]*. Autor. <http://www.matematica.una.ac.cr/index.php/documentacion-digital/category/3-cursos-de-carrera>
- Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational studies in mathematics*, 21(6), 521-544. <http://links.jstor.org/sici?sici=0013-1954%28199012%2921%3A6%3C521%3ASMKFTA%3E2.0.CO%3B2-Y>
- Fernández, F. (2002). El análisis de contenido como ayuda metodológica para la investigación. *Revista de Ciencias Sociales (Cr)*, 2(96), 35-53. <https://www.redalyc.org/pdf/153/15309604.pdf>
- Fernández, H., Morales, J., y Quesada, S. (2018). *Análisis didáctico, como fundamentación teórica, en la elaboración de materiales didácticos coherentes con el Programa de Estudios de Matemática de Costa Rica: el caso de la función lineal y de la función cuadrática* [Tesis de licenciatura, Escuela de Matemática]. Universidad Nacional, Heredia. <http://www.matematica.una.ac.cr/index.php/documentacion-digital/category/12-tesis>
- Font, V. (2008). Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas. En C. Gaita (Ed.), *Actas III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*. (pp. 21-64). Pontificia Universidad Católica del Perú. http://repositorio.pucp.edu.pe/index/bitstream/handle/123456789/110142/Actas%202008%20papel_1.pdf?sequence=4#page=34

- Font, V., Pino-Fan, L., y Breda, A. (2018). Un modelo de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas basado en el enfoque ontosemiótico. En P. Lestón (Ed.), *Acta del XII Congreso Argentino de Educación Matemática* (pp. 62-70. SOAREM, Sociedad Argentina de Educación Matemática.
- Gálvez, A. (2002). Revisión bibliográfica: usos y utilidades. *Matronas profesión*, 3(10), 25-31. <https://www.federacion-matronas.org/wp-content/uploads/2018/01/vol3n10pag25-31.pdf>
- Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2), 1-21. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p1>
- Gómez-Chacón, I., y Joglar, N. (2010). Developing competencies to teach exponential and logarithmic functions using GeoGebra from a holistic approach. *Educação Matemática Pesquisa* 12(3), 485-513. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4644>
- González, M. J., y Gómez, P. (2013). *Módulo 3 Análisis Cognitivo*. Universidad de los Andes. <http://funes.uniandes.edu.co/6454/1/ApuntesModulo3MAD3.pdf>
- González, M. J., Gómez, P., y Lupiáñez, L. (2013). *Apuntes sobre análisis cognitivo. Módulo 3 de MAD*. Universidad de los Andes. <http://funes.uniandes.edu.co/2041/1/ApuntesModulo3MAD.pdf>
- Goris, G., y Adolf, S. J. (2015). Utilidad y tipos de revisión de literatura. *ENE Revista de Enfermería*, 9(2). <http://ene-enfermeria.org/ojs/index.php/ENE/article/view/495/guirao>
- Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, 1(1), 5-21. <https://www.redalyc.org/pdf/335/33510102.pdf>
- Guzmán, M. (2001). Tendencias actuales de la Educación Matemática. *Sigma: revista de Matemática*, 1(19), 5-25. <http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43->

[73/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_19/3_Educacion_Matematica.pdf](https://www.repositorio.cepa.unal.edu.co/bitstream/handle/123456789/123456789/73/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_19/3_Educacion_Matematica.pdf)

- Haung, R., y Zbiek, R. (2016). Prospective Secondary Mathematics Teacher Preparation and Technology. En G. Kaiser (Ed.), *The mathematics education of prospective secondary teachers around the world*. (pp. 17-23). Springer Open.
- Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for research in mathematics education*, 39(4), 372-400. https://www.jstor.org/stable/40539304?seq=1#metadata_info_tab_contents
- Hitt, F. (2000). Construcción de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas. *Memorias de la XI Semana Regional de Investigación y Docencia Matemáticas*. Universidad de Sonora. http://semana.mat.uson.mx/xiisemana/Memorias/hitt_fernando.doc
- Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 213-224. <http://emis.ams.org/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf>
- Hu, Q., Son, J. W., y Hodge, L. (2018). High school teachers' content knowledge and knowledge of students' errors about quadratic functions. En T. E. Hodges, G. J. Roy y A. M. Tyminski (Eds.), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. SC: University of South Carolina y Clemson University.
- Hupaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria*. [Tesis de maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú. http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/bitstream/handle/20.500.12404/1571/HUAPAY_A_GOMEZ_ENRIQUE_MODELACION.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Kartal, B., y Çinar, C. (2018). Examining Pre-Service Mathematics Teachers' Beliefs of TPACK during a Method Course and Field Experience. *Malaysian Online Journal of Educational Technology*, 6(3), 11-37. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1184191.pdf>

- Kirikçilar, R., y Yildiz, A. (2018). Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) Craft: Utilization of the TPACK When Designing the GeoGebra Activities. *Acta Didactica Napocensia*, 11(1), 101-116.
<https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1177041.pdf>
- Koehler, M. J., y Mishra, P. (2005). What happens when teachers design educational technology? The development of technological pedagogical content knowledge. *Journal of educational computing research*, 32(2), 131-152.
<https://journals.sagepub.com/doi/abs/10.2190/0EW7-01WB-BKHL-QDYV>
- Koehler, M. J., y Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 60-70.
<https://citejournal.s3.amazonaws.com/wp-content/uploads/2016/04/v9i1general1.pdf>
- Koehler, M. J., Shin, T. S., y Mishra, P. (2012). How do we measure TPACK? Let me count the ways. En R. Ronau (Ed.), *Educational technology, teacher knowledge, and classroom impact: A research handbook on frameworks and approaches*. (pp. 16-31). IGI Global. <https://www.igi-global.com/chapter/measure-tpack-let-count-ways/55357>
- Koh, J. H. L., Chai, C. S., y Tsai, C. C. (2010). Examining the technological pedagogical content knowledge of Singapore pre-service teachers with a large-scale survey. *Journal of Computer Assisted Learning*, 26(6), 563-573.
https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1365-2729.2010.00372.x?casa_token=EcuByvqjHUEAAAAA:kThBC_1Rf_3MdTAEcg_AITMKRTFPR8LPeI2vqMFQemXzBDg6hfeqfrcghbQIsib-QqCaZvtoazVqIJ_Z_hg
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., y Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
<https://doi.org/10.3102/00346543060001001>
- Llinares, S. (1995). Del conocimiento sobre la enseñanza para el profesor al conocimiento del profesor sobre la enseñanza: implicaciones en la formación de profesores de matemáticas. En L. Blanco, y V. Mellado (Coord.), *La formación del profesorado de*

ciencias y Matemáticas en España y Portugal. (pp. 153-171) Universidad de Extremadura.

[https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/855/1/Llinares\(1995\)conocimiento%20profesor.pdf](https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/855/1/Llinares(1995)conocimiento%20profesor.pdf)

McBroom, E. (2011). Learning to Teach Geometry with Technology: A Case Study of One In-Service Teacher's Technological Pedagogical Content Knowledge. En C. Ho y M. Lin (Eds.), *Proceedings of E-Learn: World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education* (pp. 2427-2432). Association for the Advancement of Computing in Education (AACE). <https://www.learntechlib.org/primary/p/39093/>.

McBroom, E. (2013). Teaching geometry with technology: A case study of one teacher's technological pedagogical content knowledge. En R. McBride y M. Searson (Eds.), *Proceedings of SITE 2013--Society for Information Technology y Teacher Education International Conference*. (pp. 4828-4836). Association for the Advancement of Computing in Education (AACE). <https://www.learntechlib.org/primary/p/48893/>

Medvedev, F. A. (2012). *Scenes from the history of real functions* (Vol. 7). Birkhäuser.

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio de matemáticas I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada*. Autor.

Mishra, P., y Koehler, J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. [Conocimiento del contenido pedagógico tecnológico: un marco para el conocimiento docente.] *Teachers college record*, 108(6), 1017-1054. http://one2oneheights.pbworks.com/f/MISHRA_PUNYA.pdf

Moreno, A., y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. (pp. 243-258). Pirámide.

Mosquera, M. (2015). *Propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones de segundo grado de variable real en el marco de la enseñanza para la comprensión para*

fortalecer el pensamiento variacional en el grado 9 de la IER Yarumito. [Tesis de Maestría, Facultad de ciencias]. Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/55777/82363418.2015.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

García, T. (2003). *El cuestionario como instrumento de investigación/evaluación.* Centro Universitario Santa Ana. http://www.univsantana.com/sociologia/El_Cuestionario.pdf

Okuda, M., y Gómez, C. (2005). Métodos en investigación cualitativa: triangulación. *Revista colombiana de psiquiatría*, 34(1), 118-124. <http://www.redalyc.org/pdf/806/80628403009.pdf>

Önal, N. (2016). Development, Validity and Reliability of TPACK Scale with Pre-Service Mathematics Teachers. *International Online Journal of Educational Sciences*, 8(2). https://www.researchgate.net/profile/Nezih_Oenal/publication/299498920_Development_VValidity_and_Reliability_of_TPACK_Scale_with_Pre-Service_Mathematics_Teachers/links/57175ec108aefb153f9ed868/Development-Validity-and-Reliability-of-TPACK-Scale-with-Pre-Service-Mathematics-Teachers.pdf

Paniagua, M. E. (2013). *Políticas Docentes en Centroamérica. Tendencias Nacionales.* Costa Rica. UNESCO. <http://www.unesco.org/new/fileadmin/MULTIMEDIA/FIELD/Santiago/pdf/Politicass-Docentes-Centroamerica-Costa-Rica.pdf>

Pavié, A. (2011). Formación docente: hacia una definición del concepto de competencia profesional docente. *Revista electrónica interuniversitaria de formación del profesorado*, 14(1), 67-80. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3678767>

Prada-Núñez, R., Hernández-Suarez, C., y Jaimes, L. (2017). Representación semiótica de la noción de función: concepciones de los estudiantes que transitan del Colegio a la Universidad. *Panorama*, 11(20), 34-44. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6152713>

- Programa de Estado de la Nación. [PEN] (2015). *Informe V estado de la educación costarricense*. CONARE: Consejo Nacional de Rectores. <http://www.estadonacion.or.cr/educacion2015/index.html>
- Rico, L. (2015). Matemáticas escolares y conocimiento didáctico. En P. Flores y L. Rico (Coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria (Colección Psicología. Pedagogía)*. (pp. 21-39). Ediciones Pirámide. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5136885>
- Roldán, E. (2013). *El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica*. [Tesis de Maestría, Facultad de ciencias]. Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/21934>
- Roumieu, S. (2014). La importancia de las funciones en la formulación de modelos matemáticos utilizando tecnología: implementación del modelo 1 a 1. En J. Asenjo, O. Machías y J. C. Toscano (Eds.), *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. (pp. 1-14). OEI. <https://www.oei.es/historico/congreso2014/32memorias2014.php>
- Salas-Rueda, A. (2018). Uso del modelo TPACK como herramienta de innovación para el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Perspectiva educacional*, 57(2), 3-26. https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?pid=S0718-97292018000200003yscript=sci_arttext
- Schmidt, D. A., Baran, E., Thompson, A. D., Mishra, P., Koehler, M. J., y Shin, T. S. (2009). Technological pedagogical content knowledge (TPACK) the development and validation of an assessment instrument for preservice teachers. *Journal of research on Technology in Education*, 42(2), 123-149. Doi: [10.1080/15391523.2009.10782544](https://doi.org/10.1080/15391523.2009.10782544)
- Seckel, M., y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado de matemática. *Magis, Revista Internacional De Investigación En Educación*, 12(25), 127-144. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.m12-25.crfp>

- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Shulman, L. S., (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <http://links.jstor.org/sici?sici=0013-189X%28198602%2915%3A2%3C4%3ATWUKGI%3E2.0.CO%3B2-X>
- Socas, M., Camacho, M., y Hernández, J. (2013). Una propuesta formativa de profesores de matemáticas en la educación obligatoria fundamentada en el análisis didáctico desde el enfoque lógico semiótico. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. (pp. 59-80). Comares.
- Suárez-Rodríguez, J., Almerich, G., Díaz-García, I., y Fernández-Piquera, R. (2012). Las competencias en TIC del profesorado. Influencia de factores personales y contextuales. *Universitas Psychologica*, 11(1), 293-309. <https://revistas.javeriana.edu.co/index.php/revPsycho/article/view/997>
- Tatar, E., Aldemir, R., y Niess, M. (2018). Teaching Geometry in The 21st Century: Investigating Teachers' Technological Pedagogical Content Knowledge Levels. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 37(2), 111-129. <https://www.learntechlib.org/noaccess/174326/>
- Taylor, S., y Bogdan, R. (2000). *Introducción a los métodos cualitativos*. (3^{era} ed.). Paídos. <https://asodea.files.wordpress.com/2009/09/taylor-s-j-bogdan-r-metodologia-cualitativa.pdf>
- Torres, A., y Gilbert, R. (2010). Empleo de la tecnología en la enseñanza del álgebra. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1153-1160). Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Ugalde, W. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Revista digital: Matemática, Educación e Internet*, 14(1), 1-48.

https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ARTICULOS_V14_N1_2013/RevistaDigitalUgaldeV14n12013/RevistaDigitalUgaldeV14n12013.pdf

United Nations Educational Scientific and Cultural Organization. [UNESCO] (2012). Challenges in basic mathematics education. *International Group of Experts on Science and Mathematics Education Policies*. (pp. 114-207). Autor. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000191776_eng?posInSet=1yqueryId=N-EXPLORE-f47757a4-a028-4fc5-9d89-496b3ca43afd

Universidad Nacional. (2017). Plan de Estudios de la Carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática [BLEM]. autor. <http://www.matematica.una.ac.cr/index.php/documentacion-digital/category/7-planes-de-estudio>

Villalobos, L. (2017). *Enfoques y diseños de investigación social: Cuantitativos, cualitativos y mixtos*. Editorial Universidad Estatal a Distancia. Colección general.

Zúñiga, L., y Melba, I. (2009). *Un estudio acerca de la construcción del concepto de función, visualización en alumnos de un curso de cálculo I*. [Tesis de Maestría]. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. <http://www.cervantesvirtual.com/downloadPdf/un-estudio-acerca-de-la-construccion-del-concepto-de-funcion-visualizacion-en-alumnos-de-un-curso-de-calculo-i/>

Patton, M. (1990). Designing Qualitative Studies. *Qualitative evaluation and research methods* (pp. 169-186). CA: Sage.

7. Anexos

Anexo 1

**UNIVERSIDAD NACIONAL, COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
ESCUELA DE MATEMÁTICA**

Cuestionario sobre el conocimiento tecnológico de los profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional.

Este instrumento tiene la finalidad recolectar datos necesarios para realizar la investigación sobre los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido presentes en los profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional, durante el I ciclo 2020. La información recolectada se utilizará solamente con fines educativos y se manejará de forma confidencial.

Agradecemos de antemano su valiosa colaboración.

INSTRUCCIONES

Conteste las siguientes interrogantes con responsabilidad y honestidad de acuerdo con las experiencias que ha vivido en su proceso de formación en esta universidad.

1 SECCIÓN

Información General

En este apartado se le consultará sobre aspectos generales y básicos relacionados con su rol como estudiante de la Universidad Nacional.

1. Dirección de correo electrónico: _____
2. Sexo: Mujer ___ Hombre ___
3. Edad (años cumplidos): _____
4. Ha impartido clases en el colegio o particulares: Sí ___ No ___.
Si su respuesta es afirmativa, indique dónde: _____
5. Provincia de procedencia: _____
6. Nivel de carrera en el que se encuentra actualmente: _____
7. Ha reprobado algún curso de esta carrera: Sí ___ No ___ (**Si marcó NO pase a la pregunta 9**)

8. En caso de haber reprobado algún curso, indique el nombre del curso y la cantidad de veces que lo ha matriculado respectivamente:

Nombre del curso:	Veces que lo ha matriculado:
A. _____	A. _____
B. _____	B. _____
C. _____	C. _____
D. _____	D. _____
E. _____	E. _____
F. _____	F. _____

9. Tiene aprobado el curso MAC403 Principios de matemática II: Sí ___ No ___

10. Tiene aprobado el curso DEY402 Modelos pedagógicos y teorías del aprendizaje: Sí ___ No ___

11. ¿Cuáles materias está cursando actualmente?

II SECCIÓN

Conocimientos tecnológicos

En este apartado se le consultará sobre aspectos relacionados con la enseñanza de las funciones y el uso de tecnología.

1. Responda según su criterio y comprendiendo que MD=Muy en desacuerdo; D=Desacuerdo; N=Ni en desacuerdo ni en acuerdo; A=De acuerdo; DA=Muy de acuerdo.

	MD	D	N	A	DA
1. Sé resolver mis problemas técnicos básicos con la tecnología.					
2. Asimilo conocimientos tecnológicos fácilmente.					
3. Me mantengo al día de las nuevas tecnologías importantes.					
4. A menudo juego y hago pruebas con la tecnología.					
5. Conozco muchas tecnologías diferentes.					
6. Tengo los conocimientos técnicos que necesito para usar la tecnología.					
7. He tenido oportunidades suficientes de trabajar con diferentes tecnologías.					
8. Me siento cómodo al utilizar la tecnología.					

2. Según su criterio, comente algunos de los errores que con frecuencia se presentan en la enseñanza de la función cuadrática.

3. De las siguientes herramientas tecnológicas, seleccione con **X** las que considera apropiadas para la enseñanza de la función cuadrática.

	Sí	No	No lo conozco
GeoGebra			
Excel			
Winplot			
Foros virtuales			
YouTube			
Wolfram Alpha			
R Studio			
Sketchpad			
Mathematica			

4. Comente cómo los softwares que seleccionó le podrían ayudar a subsanar las dificultades que consideró en la pregunta 2.

5. Cuando desconoce algún concepto o información acerca del contenido matemático, ¿busca en la web? Sí ____ No ____

6. En el siguiente espacio puede sugerir otras tecnologías que considere adecuadas para la enseñanza de funciones.

7. Comente, de forma amplia, las ventajas o desventajas que usted considera se presentan al utilizar la tecnología en la clase de matemática.

GRACIAS POR SU COLABORACIÓN

Anexo 2

UNIVERSIDAD NACIONAL, COSTA RICA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES ESCUELA DE MATEMÁTICA

Actividad sobre los conocimientos TPACK de los profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional.

Este instrumento tiene la finalidad recolectar datos necesarios para realizar la investigación sobre los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido presentes en los profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional, durante el I ciclo 2020. La información recolectada se utilizará solamente con fines educativos y se manejará de manera confidencial.

Agradecemos de antemano su valiosa colaboración.

INSTRUCCIONES

Responda lo que se le solicita de forma clara y ordenada, utilice los conocimientos que ha obtenido durante su proceso de formación.

1. Seleccione los aspectos que considera pueden influir en el proceso de enseñanza y aprendizaje
 - a) Condición del aula (iluminación, ventilación, asientos apropiados, etc.)
 - b) Comunicación asertiva del docente-estudiante
 - c) Comunicación asertiva del estudiante-docente
 - d) Recursos didácticos pertinentes (adecuados y suficientes)
 - e) Conocimiento del docente sobre la materia

2. Anote otros aspectos que considere importantes:

Anotaciones para los investigadores:

Esta pregunta permite conocer aquellos factores que el PMFI considera que influyen el proceso de aprendizaje y esto facilita la caracterización de sus conocimientos pedagógicos.

3. Explique con sus propias palabras cual sería el modelo pedagógico que más utilizaría al enseñar matemática y por qué (clase magistral, trabajo colaborativo, resolución de problemas u otras).

Anotaciones para los investigadores:

Esta pregunta permite conocer la postura que posee el participante ante las metodologías más utilizadas en la enseñanza, puede mostrar evidencia de sus conocimientos pedagógicos al justificar porqué utilizar una metodología en específico.

4. Enuncie una posible definición de función cuadrática.

Anotaciones para los investigadores:

Esta pregunta permite medir si el estudiante brinda una definición adecuada del concepto de función cuadrática. Además, se pretende que el PMFI brinde una definición en palabras o utilizando en lenguaje matemático como se trabaja en el curso MAC403 Principios de la Matemática II.

Definiciones esperadas:

- La función cuadrática es una función polinómica de grado dos que está definida para todo número real.
- La función $f: D \rightarrow R$ con $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a, b, c \in R$ y $a \neq 0$.

5. Considere la siguiente situación:

La entrada a un edificio mide 2.25 metros de alto en el centro, 3 metros de ancho en la base y tiene la forma de un arco parabólico.

Determine **el criterio** de la función que modela el arco de la entrada del edificio.

6. Grafique la función encontrada en software GeoGebra y guarde el archivo con el nombre **Nombredel estudiante_animación_1.ggb**.
7. Si hay que meter una caja rectangular de 2 metros de alto, la cual no puede volcarse por el contenido que lleva, entonces ¿Cuál es el ancho máximo (en metros) que puede tener la caja?

Anotaciones para los investigadores:

Esta pregunta permite conocer si el PMFI puede encontrar la expresión cuadrática que describe la situación planteada, además, si sabe graficar funciones en GeoGebra. Por lo tanto, aporta evidencia del conocimiento tecnológico y de funciones de los PMFI.

Se pretende que el estudiante identifique las intersecciones con el eje X y así pueda encontrar la expresión algebraica, además como no es única la parábola que interseca a al eje X en dos puntos el PMFI debe analizar la concavidad de la ecuación que encontró y reflexionar si la expresión corresponde a la situación planteada o su concavidad no coincide, en caso de no coincidir se espera que el PMFI analice sus procedimientos y logre plantear la ecuación correcta.

8. Considere la siguiente situación:

Una función que modela la altura, en metros, de un balón de beisbol lanzado por un niño tiene como criterio de asociación $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3x + 1.83$, donde x es la distancia horizontal (en metros) desde donde se lanzó el balón.

Determine el dominio y el ámbito de la función de acuerdo con la situación presentada; puede graficar la función en GeoGebra si lo desea.

9. Interprete el dominio y el ámbito de la función anterior de acuerdo con el contexto (la altura de la bola y la distancia).
10. En el software GeoGebra realice una representación animada de la situación considerando el dominio encontrado, es decir un punto que simule la trayectoria del balón de beisbol y nombre el archivo .ggb como **Nombredel estudiante_animación_2.ggb**.
11. Detenga en cualquier momento el desplazamiento del punto creado en la gráfica del ejercicio anterior e identifique la coordenada en X y la coordenada en Y de ese punto. ¿Qué relación tiene la coordenada en Y con la coordenada en X en el contexto?
12. Calcule el eje de simetría de la función dada y explique con sus propias palabras lo que significa dentro del contexto.

Anotaciones para los investigadores:

Esta pregunta permite evidenciar los conocimientos de los PMFI sobre funciones, además, permite mostrar conocimientos pedagógicos y tecnológicos acerca de este tema, específicamente si saben determinar el dominio de una función de acuerdo con el contexto y realizar animaciones en un software. Se espera que los PMFI identifiquen que en ese contexto el dominio y el ámbito no pueden ser negativos, además, se aspira que el estudiante manipule correctamente GeoGebra y pueda utilizar la función *si entonces* de este software, e insertar un punto que se deslice simulando la trayectoria del balón.

13. Comente la manera en que se aborda el tema de función cuadrática durante décimo año.

Anotaciones para los investigadores:

Se espera que los PMFI conozcan los contenidos que se enseñan en secundaria acerca de la función cuadrática y proponga una secuencia adecuada para su enseñanza.

14. Describa de forma detallada cómo organizaría una clase sobre este tema en dicho nivel si usted fuera el profesor. Sea lo más específico posible.

Anotaciones para los investigadores:

Se espera que el PMFI evidencie su conocimiento sobre enseñanza de funciones y utilice de forma apropiada el software GeoGebra, además, que plantee técnicas pedagógicas que faciliten el aprendizaje de este tema a través del software mencionado.

15. Siga las siguientes las siguientes instrucciones

- a. Construya una situación modelo para introducir el tema de función cuadrática en secundaria, utilizando el software GeoGebra.
- b. Abra un documento en Word y escriba las instrucciones para ejecutar la actividad que construyó. Llame el archivo como **Nombredelestudiante_Instrucciones.docx**. Nombre el archivo de GeoGebra que utiliza como **Nombredelestudiante_situación.ggb**.
- c. Envíe con correo email con los archivos
 - **Nombredelestudiante_animación_1.ggb**
 - **Nombredelestudiante_animación_2.ggb**
 - **Nombredelestudiante_Instrucciones.docx**
 - **Nombredelestudiante_situación.ggb**

A las direcciones: **yerlincc018gmail.com**, **wil.vargasdelgado.com**

- d. En el foro llamado **Actividades e instrucciones**, realice una entrada y coloque las instrucciones en Word y el archivo GeoGebra como adjunto.

Anotaciones para los investigadores:

Se espera que las instrucciones creadas por los PMFI sean claras y se evidencie que haya una secuencia adecuada para el desarrollo del tema, con estrategias metodológicas que promuevan la comprensión y favorezcan el desarrollo conceptual y procedimental, así como la manera adecuada de usar las diferentes representaciones semióticas.

GRACIAS POR SU COLABORACIÓN

Anexo 3

**UNIVERSIDAD NACIONAL, COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
ESCUELA DE MATEMÁTICA**

Actividad para la reflexión sobre la propuesta de la guía de instrucciones creadas por los profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional.

Este instrumento tiene la finalidad recolectar datos necesarios para realizar la investigación sobre los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenido presentes en los profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional, durante el I ciclo 2020. La información recolectada se utilizará solamente con fines educativos y se manejará de manera confidencial.

Agradecemos de antemano su valiosa colaboración.

INSTRUCCIONES

Realice las siguientes tareas con responsabilidad y honestidad, responda lo que se le solicita de forma clara y ordenada, utilice los conocimientos que ha obtenido durante su proceso de formación.

1. Se le asignará las instrucciones creadas por otro compañero. Realice la propuesta que se le asignó.

Anotaciones para los investigadores:

De este ítem se pueden obtener categorías emergentes, pues como los PMFI tienen libertad para la creación de la guía de instrucciones, se podría presentar el caso que en el análisis de estas guías los PMFI evidencien conocimientos que no han sido previstos.

2. Valore la propuesta e instrucciones de su compañero, brinde comentarios y recomendaciones de forma justificada para mejorarla.

Anotaciones para los investigadores:

En este ítem se pretende saber si los PMFI, dentro de su análisis, toman en cuenta aspectos como: la representación semiótica que más se adapta a la situación problema planteada, el recurso tecnológico apropiado para facilitar el aprendizaje a los estudiantes y dificultades que se pueden presentar para el aprendizaje del tema.

3. Realice un comentario en el foro, de forma detalla con las observaciones que hizo en el segundo ítem.

Anotaciones para los investigadores:

Este ítem pretende conocer si los PMFI reflexionan sobre cómo influye en el proceso de aprendizaje las decisiones e instrucciones del profesor, se espera que esta reflexión se evidencie en las sugerencias y justificaciones brindas por el PMFI.

4. Considere las recomendaciones dadas para mejorar su actividad y justifique por qué realiza los cambios o no.

Anotaciones para los investigadores:

En este ítem se pretende saber si los PMFI reflexionan sobre aspectos como: la representación semiótica que más se adapta a la situación problema planteada, el recurso tecnológico que puede facilitar el trabajo a los estudiantes y dificultades que se pueden presentar para el aprendizaje del tema, para aceptar o rechazar los cambios que propusieron sus compañeros.

GRACIAS POR SU COLABORACIÓN