UNICIENCIA 24
pp. 121-132
2010

RESOLUCIÓN DE RELACIONES DE RECURRENCIA LINEALES NO HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES A TRAVÉS DE VALORES Y VECTORES PROPIOS

Enrique Vílchez Quesada
Universidad Nacional de Costa Rica
Escuela de Informática
evilchez@una.ac.cr

RESUMEN:

La resolución de relaciones de recurrencia es un tema de vital importancia para abordar distintos tipos de problemas en matemática e informática. Tradicionalmente, los textos de Estructuras Discretas, que proponen métodos de resolución de recursividades lineales, se basan en el planteamiento de ecuaciones polinómicas difícilmente programables. Este artículo expone un método fundamentado en el uso de valores y de vectores propios, brinda la facilidad, por un lado, de ofrecer soluciones suficientemente generales y por otro, de utilizar un enfoque que permite su programación de una manera relativamente sencilla.

Palabras clave: sucesiones, recurrencia, valores, vectores, propios, no homogéneas.

ABSTRACT:

The resolution of recurrencia relationships is a topic of vital importance to approach different types of problems in mathematics and computer science. Traditionally the texts of Discreet Structures that propose methods of resolution of lineal recursividades, are based on the position of polynomial difficultly programmable equations. This article exposes a method based in the use of values and own vectors, it offers the easiness on one hand of throwing sufficiently general solutions and for other, of using a focus that it allows its programming in a relatively simple way.

Key words: successions, recurrencia, values, vectors, own, not homogeneous.

INTRODUCCIÓN

Las relaciones de recurrencia, por su naturaleza, manifiestan la necesidad de determinar de forma explícita mediante algún método o técnica, el término n-ésimo de la sucesión que representan.

El presente artículo tiene por objetivo resolver este problema para un tipo especial de relación de recurrencia llamada *recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes de orden k*. La propuesta es el complemento de una serie de dos algoritmos desarrollados con anterioridad,para resolver relaciones de recurrencia lineales, pero estrictamente homogéneas.

Una relación de recurrencia lineal no homogénea de orden k con coeficientes constantes para una sucesión $(S_n)_{n\in IN\cup\{0\}}$ es aquella de la forma:

$$S_{n+k}=\beta_{k-1}S_{n+(k-1)}+\beta_{k-2}S_{n+(k-2)}+...+\beta_1 S_{n+1}+\beta_0 S_n+f(n)$$

Siendo los β_j números reales fijos $\forall j,\ j\in IN\cup\{0\},\ 0\leq j\leq k-1$ que junto con las k condiciones iniciales

$$S_j=c_j,\ c_j\in IR,\ \forall j,\ j\in IN\cup\{0\},\ 0\leq j\leq k-1$$

determinan de manera única los elementos de la sucesión.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Pretendemos generar un método mediante la aplicación de los valores y vectores propios, que nos permita caracterizar el término n-ésimo de una sucesión definida por una

Recibido 3 de marzo de 2009 – aceptado 10 de junio de 2009

relación de recurrencia lineal no homogénea de orden k con coeficientes constantes.

Dada una relación de recurrencia de este tipo:

$$S_{n+k}=\beta_{k-1}S_{n+(k-1)}+\beta_{k-2}S_{n+(k-2)}+\ldots+\beta_1 S_{n+1}+\beta_0 S_n+f(n)$$

junto con las k condiciones iniciales $S_j=c_j$, $0\leq j\leq k-1$ siendo los β_j y los c_j números reales fijos $\forall j,\ j\in IN\cup\{0\}$, $0\leq j\leq k-1$. El método que aquí desarrollamos se fundamenta en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S_{n+k}=\beta_{k-1}S_{n+(k-1)}+\beta_{k-2}S_{n+(k-2)}+\cdots+\beta_1 S_{n+1}+\beta_0 S_n+f(n)\\ S_{n+(k-1)}=S_{n+(k-1)}\\ S_{n+(k-2)}=S_{n+(k-2)}\\ \vdots\\ S_{n+1}=S_{n+1}\end{cases}$$

Este sistema escrito, en forma matricial, puede expresarse como

$$X_{n+1}=\mathbf{A}X_n+B \qquad (2.1)$$

siendo,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\beta_{k-1} & \beta_{k-2} & \cdots & \beta_1 & \beta_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}$$ una matriz $k\times k$ con entradas reales y

$$X_n=\begin{pmatrix}S_{n+(k-1)}\\ S_{n+(k-2)}\\ \vdots\\ S_n\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}f(n)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$ vectores en R^k.

En 2.1 se observa aplicando un método iterativo progresivo que

$$\begin{cases} X_1=\mathbf{A}X_0+B\\ X_2=\mathbf{A}X_1+B=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}X_0+B)+B=\mathbf{A}^2X_0+A\cdot B+B\\ X_3=\mathbf{A}X_2+B=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}^2X_0+A\cdot B+B)+B=\mathbf{A}^3X_0+\mathbf{A}^2\cdot B+A\cdot B+B\\ \vdots\\ X_n=\mathbf{A}^nX_0+\mathbf{A}^{n-1}\cdot B+A^{n-2}\cdot B+\cdots+A\cdot B+B\end{cases}$$

En consecuencia, se intuye la siguiente generalización:

$$X_n=\mathrm{A}^nX_0+\mathrm{A}^{n-1}\cdot B+A^{n-2}\cdot B+\cdots+A\cdot B+B,\forall n\in IN \qquad (2.2)$$

El resultado 2.2 se puede demostrar con mucha sencillez utilizando el primer principio de inducción matemática. Omitiremos esta demostración.

Al observar 2.2 notamos que nuestro problema queda completamente resuelto si logramos calcular A^h con $1\leq h\leq n,\ h\in IN$, pues al desarrollar $\mathrm{A}^nX_0+\mathrm{A}^{n-1}\cdot B+A^{n-2}\cdot B+\cdots+A\cdot B+B$ nos interesa obtener la última fila de esta matriz que nos devuelve de manera explícita a S^n.

Si A es una matriz diagonalizable, sabemos que existe una matriz invertible P y una matriz diagonal D formada por los valores propios de A, tal que: $\mathrm{A}=PDP^{-1}$. Esto nos permite hallar $\mathrm{A}^h\forall h,\ h\in IN$, pues por inducción matemática se puede comprobar que: $\mathrm{A}^h=PD^hP^{-1}$.

En el artículo *Valores propios y las sucesiones definidas de forma recursiva* (Vílchez y Monge, 2001), se demostró que la matriz A es diagonalizable sí y solo sí todos sus valores propios son simples, además, se probó que:

$$P=\begin{pmatrix}\overline{\lambda}_1^{k-1} & \overline{\lambda}_2^{k-1} & \cdots & \overline{\lambda}_k^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \cdots & \lambda_k^1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

siendo λ_1, λ_1, ..., λ_k los valores propios de la matriz A. Adicionalmente, en la citada publicación, se demostró que el polinomio característico de A viene dado por:

$$\mathrm{P}(\lambda)=\lambda-\beta_{k-1}\lambda^{k-1}-\beta_{k-2}\lambda^{k-2}-\ldots-\beta_1\lambda-\beta_0 \qquad (2.4)$$

Entonces, si la matriz A no es diagonalizable (tiene valores propios de multiplicidad algebraica mayor estricta a uno), esta se puede reducir por medio de una matriz de Jordan. Por resultados conocidos de la teoría de matrices, con certeza sabemos que para cualquier matriz cuadrada A es posible encontrar su forma canónica de Jordan, sin embargo, ¿cuál es el procedimiento que se aplica para ello?

En términos generales dada una matriz $A \in M_k(IR)$ con valores propios distintos dos a dos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de multiplicidad algebraica $r_1, r_2, \ldots, r_m$ respectivamente, si suponemos que los subespacios propios $E_{\lambda_j} \forall_j, j \in IN, 1 \leq j \leq m$ son de dimensión uno, y siendo X_1^j un vector propio asociado a $\lambda_j \forall_j, j \in IN, 1 \leq j \leq m$ el método que utilizaremos se basa en formar y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (A - \lambda_j I_k) X_2^j = X_1^j \\ (A - \lambda_j I_k) X_3^j = X_2^j \\ \vdots \\ (A - \lambda_j I_k) X_{r_j}^j = X_{r_j - 1}^j \end{cases} \quad \text{con } r_j \neq 1 \qquad (2.5)$$

A cada uno de los vectores $X_1^j, X_3^j, X_{r_j}^j$, se les llama vectores propios generalizados o generalísimos de A asociados al valor propio λ_j.

Hallando estos vectores propios generalísimos $\forall_j, j \in IN, 1 \leq j \leq m$, es posible obtener la matriz de transición P^{-1} la cual viene dada por:

$$(X_1^1\ X_2^1 \prod X_{r_1}^1\ X_1^2\ X_2^2 \prod X_{r_2}^2 \prod X_1^m\ X_2^m \prod X_{r_m}^m)$$

Observe que por cada vector propio X_1^j se forman r_j columnas en P^{-1} si $r_j=1$ entonces el único vector que se requiere para completar las r_j columnas correspondientes en esta matriz, es el vector propio X_1^j y en este caso, por tanto, no se debe hallar algún vector propio generalizado. Además, si algún subespacio propio E_{λ_j} es de dimensión $t_j \in IN$, $t_j \neq 1$ existen t_j vectores propios asociados a λ_j linealmente independientes y en consecuencia se requerirán $r_j - t_j$ vectores propios generalizados para formar las r_j columnas correspondientes en P^{-1}.

Centremos ahora nuestra atención en cómo hallar la potencia n−ésima de una matriz de Jordan. Dada una matriz de Jordan de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} B_1(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_3(\lambda_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_m(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

Es notable su estructura diagonal, en consecuencia se puede inferir que:

$$J^n = \begin{pmatrix} (B_1(\lambda_1))^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (B_2(\lambda_2))^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (B_3(\lambda_3))^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (B_m(\lambda_m))^n \end{pmatrix} \forall n, n \in N \qquad (2.6)$$

Es decir, la potencia n−ésima de una matriz de Jordan se puede calcular al obtener las potencias n−ésimas de los bloques que la constituyen, sin embargo, ¿cómo se calculan dichas potencias? Para dar respuesta a esta pregunta se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea $B = (b_{ij}) \in M_r(IR)$ un bloque de Jordan de la forma:*

$$b_{ij} = \begin{cases} \lambda \text{ si } i = j \\ 1 \text{ si } i = i+1 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

es decir: $$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces $B_n = (c_{ij}) \in M_r(IR) \forall n, n \in IN$ es tal que:

$$c_{ij} = \begin{cases} \lambda^n \text{ si } i = j \\ \dfrac{n!}{(n-l)!\,l!} \lambda^{n-l} \text{ si } j = i+1 \text{ con } l=1,2,\ldots,r-1 \\ 0 \text{ si } i > j \end{cases}$$

o bien:

$$B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \frac{n!}{(n-1)!1!}\lambda^{n-1} & \frac{n!}{(n-2)!2!}\lambda^{n-2} & \cdots & \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}\lambda^{n-r+1} \\ 0 & \lambda^n & \frac{n!}{(n-1)!1!}\lambda^{n-1} & \cdots & \frac{n!}{(n-r+2)!(r-2)!}\lambda^{n-r+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n!}{(n-1)!1!}\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Prueba. Procedamos por el primer principio de inducción.

Para $n=1$, $B=(\lambda) \Rightarrow B^n=(\lambda^n)$ con lo cual queda probado el teorema en este caso.

Supongamos por hipótesis de inducción que para algún k, $k \in IN$, $B^k = (c'_{ij})$ es tal que:

$$c'_{ij} = \begin{cases} \lambda^k \text{ si } i = j \\ \dfrac{k!}{(k-l)!l!}\lambda^{k-l} \text{ si } j = i + l \text{ con } l = 1,2,\ldots,r-1 \\ 0 \text{ si } i > j \end{cases}$$

Probemos el teorema para k+1. Sea $B_k+1=(c_{ij}) \in M_r(IR)$: $B_k+1= B_k \cdot B$ por definición de potencia de matrices $\Rightarrow$ $c_{ij} = \sum_{h=1}^{r} c'_{ih} b_{hj}$ por definición del producto de matrices.

Consideremos los siguientes casos:

a) i=j

$$c_{ii} = \sum_{h=1}^{r} c'_{ih} b_{hi} = c'_{i1} b_{1i} + c'_{i2} b_{2i} + \ldots + c'_{ii-1} b_{i-1i} + \ldots + c'_{ir} b_{ri}$$

$=0+0+\ldots+0+\lambda\cdot\lambda^k+0+\ldots+0=\lambda^{k+1}$ por definición de B y la hipótesis inductiva

b) $j=i+l$ con $l=1,2,\ldots,r-1$

$$c_{ii+l} = \sum_{h=1}^{r} c'_{ih} b_{hi+l} = c'_{i1} b_{1i+l} + c'_{i2} b_{2i+l} + \ldots + c'_{ii+l-1} b_{i+l-1i+l} + c'_{ii+l} b_{i+li+l} + c'_{ii+l+1} b_{i+l+1i+l} + \ldots + c'_{ir} b_{ri+l}$$

$=0+0+\ldots+\dfrac{k!}{(k+1-l)!(l-1)}\lambda^{k+1-l}\cdot 1+\lambda\cdot\dfrac{k!}{(k-l)!l!}+0+\ldots+0$ por definición de B y la hipótesis inductiva

$$= \frac{k!}{(k+1-l)!(l-1)!}\lambda^{k+1-l}\left[1+\frac{k+1-l}{l}\right] = \frac{k!}{(k+1-l)!(l-1)!}\lambda^{k+1-l}\left[\frac{l+k+1-l}{l}\right]$$

$$= \frac{k!}{(k+1-l)!(l-1)!}\lambda^{k+1-l}\left[\frac{k+1}{l}\right] = \frac{(k+1)!}{(k+1-l)!l!}\lambda^{k+1-l}$$

c) i > j

$$c_{ii+l} = \sum_{h=1}^{r} c'_{ih} b_{hj} = c'_{i1} b_{1j} + c'_{i2} b_{2j} + \ldots + c'_{ij-1} b_{j-1j} + c'_{ij+l} b_{jj} + c'_{ij+1} b_{j+1j} + \ldots + c'_{ir} b_{rj}$$

$=0+0+\ldots+0\cdot 1+0\cdot\lambda+0+\ldots+0=0$ por definición de B y la hipótesis inductiva

$$\therefore\ c_{ij} = \begin{cases} \lambda^{k+1} \text{ si } i = j \\ \dfrac{(k+1)!}{(k+1-l)!l!}\lambda^{k+1-l} \text{ si } j = i + l \text{ con } l = 1,2,\ldots,r-1 \\ 0 \text{ si } i > j \end{cases}$$

Estos resultados nos permiten crear un modelo general para resolver relaciones de recurrencia no homogéneas lineales de cualquier orden cuando los valores propios tienen multiplicidad algebraica mayor estricta que uno. Supongamos que la ecuación característica tiene m soluciones distintas dos a dos $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,m$ con multiplicidades algebraicas $r_1,r_2,\ldots,r_m$ respectivamente. A partir de estas condiciones sabemos que $A^n=P^{-1}\cdot J^n\cdot P$ $\forall n$, $n \in IN \cup \{0\}$ con:

$$J^n = \begin{bmatrix} (B_1(\lambda_1))^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (B_2(\lambda_2))^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (B_3(\lambda_3))^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (B_m(\lambda_m))^n \end{bmatrix} \text{ por 2.6}$$

donde cada $B_j\,(\lambda_j)$ es un bloque de Jordan de orden r_j y P es la matriz de transformación de semejanza de la forma canónica de Jordan de A. Además, por el teorema 1 tenemos que:

$$B_j^n(\lambda_j) = \begin{bmatrix} \lambda_j^n & \frac{n!}{(n-1)!1!}\lambda_j^{n-1} & \frac{n!}{(n-2)!2!}\lambda_j^{n-2} & \cdots & \frac{n!}{(n-r_j+1)!(r_j-1)!}\lambda_j^{n-r_j+1} \\ 0 & \lambda_j^n & \frac{n!}{(n-1)!1!}\lambda_j^{n-1} & \cdots & \frac{n!}{(n-r_j+2)!(r_j-2)!}\lambda_j^{n-r_j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{n!}{(n-1)!1!}\lambda_j^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j^n \end{bmatrix}$$

Así, para determinar las columnas de la matriz P^{-1}, hemos observado que por cada valor propio λ_j de multiplicidad algebraica r_j se forman r_j columnas de P^{-1}. La primera de ellas corresponde al vector propio $(\lambda_j^{k-1}, \lambda_j^{k-2}, \ldots, \lambda_j, 1)$ asociado a λ_j y las otras $r_j - 1$ columnas están constituidas por $r_j - 1$ vectores propios generalísimos asociados a λ_j.

El número máximo de vectores propios generalísimos que es necesario encontrar en este método, es igual a $k-1$ y lo anterior ocurre cuando de la ecuación característica se obtiene una única solución. Si a lo sumo se requieren $k-1$ vectores propios generalísimos, a continuación se explicará cómo encontrar estos vectores.

Para el caso dos por dos, el vector propio generalísimo requerido es (1,0). Los vectores propios generalísimos asociados a λ_j para el caso tres por tres son $(2\lambda_j,1,0)$ y (1,0,0). Para el caso cuatro por cuatro, los vectores propios generalísimos asociados a λ_j son $(3\lambda_j^2, 2\lambda_j,1,0)$ $(3\lambda j, 1,0,0)$ y (1,0,0,0). Para el caso cinco por cinco son $(4\lambda_j^3, 3\lambda_j^2, 2\lambda_j,1,0)$ $(6\lambda_j^2, 3\lambda_j,1,0,0)$ $(4\lambda_j,1,0,0,0)$ y (1,0,0,0,0) y para el caso seis por seis corresponden a: $(5\lambda_j^4, 4\lambda_j^3, 2\lambda_j,1,0)$ $(10\lambda_j^3,6\lambda_j^2,13\lambda_j,1,0,0)$ $(10\lambda_j^2, 4\lambda_j,1,0,0,0)$ $(5\lambda_j,1,0,0,0,0)$ y (1,0,0,0,0,0).

Si formamos por cada grupo de vectores, añadiendo el vector propio original una matriz de coeficientes por fila para cada potencia de λ_j, se obtiene lo siguiente:

$$H_2^j = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \lambda_j^1 & \lambda_j^0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$H_3^j = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda_j^2 & \lambda_j^1 & \lambda_j^0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$H_4^j = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda_j^3 & \lambda_j^2 & \lambda_j^1 & \lambda_j^0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$H_5^j = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \lambda_j^4 & \lambda_j^3 & \lambda_j^2 & \lambda_j^1 & \lambda_j^0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$H_6^j = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \lambda_j^5 & \lambda_j^4 & \lambda_j^3 & \lambda_j^2 & \lambda_j^1 & \lambda_j^0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matriz $H_i^j \in M_i\ (IR)\ \forall i,\ i \in IN \geq 2$ representa la matriz de coeficientes del vector propio original y los vectores propios generalísimos asociados a λ_j para el caso i por i. Lo interesante de cada una de estas matrices triangulares superiores radica en sus i diagonales no nulas. Observe, por ejemplo, las diagonales no nulas de la matriz H_6^j el triángulo numérico que estas forman viene dado por:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

que corresponde al triángulo de Pascal con n=5. Lo anterior significa que las diagonales H_6^j de la matriz están constituidas por coeficientes binomiales.

En términos más generales, es posible concluir por inducción finita que:

$$H_i^j = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \lambda_j^{k-1} & \lambda_j^{k-2} & \lambda_j^{k-3} & & \lambda_j^1 & \lambda_j^0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \binom{k-1}{0} & \binom{k-2}{0} & \binom{k-3}{0} & \cdots & \binom{1}{0} & \binom{0}{0} \\ 0 & \binom{k-1}{1} & \binom{k-2}{1} & \cdots & \binom{2}{1} & \binom{1}{1} \\ 0 & 0 & \binom{k-1}{2} & \cdots & \binom{3}{2} & \binom{2}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{k-1}{k-2} & \binom{k-2}{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{k-1}{k-1} \end{pmatrix} \end{array} \quad (2.7)$$

La matriz H_i^j del vector propio original y los vectores propios generalísimos asociados a λ, nos permite completar las r_j columnas de P^{-1} por cada λ_j con j=1,2,...m.

A partir de los resultados es posible expresar la potencia h-ésima de la matriz A en 2.2 como:

$$A^h = PT^hP^{-1} \quad (2.8)$$

siendo T una matriz diagonal o una matriz de Jordan según sea el caso.

Si en 2.2 sustituimos la matriz A utilizando 2.8 entonces, se obtiene:

$$X_n = PT^nP^{-1}X_0 + PT^{n-1}P^{-1}\cdot B + PT^{n-2}P^{-1}\cdot B + \ldots + PT^0P^{-1}\cdot B$$
$$\Rightarrow X_n = PT^nP^{-1}X_0 + P\cdot(T^{n-1}+T^{n-2}+\ldots+T^0)\cdot P^{-1}\cdot B \quad (2.9)$$

El resultado 2.9 proporciona un método general para resolver relaciones de recurrencia lineales no homogéneas con coeficientes constantes de cualquier orden. En la sección siguiente se exponen demostraciones formales que resuelven recursividades de orden dos y tres, sin embargo, el algoritmo explicado a través de estos casos particulares, permite deducir un método de resolución en recurrencias de orden mayor.

RELACIONES DE RECURRENCIA LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE ORDEN DOS

Método de resolución

Dada la relación de recurrencia:

$$S_{n+2}=\beta_1 S_{n+1}+\beta_0 S_n+f(n)$$

sujeta a las condiciones iniciales $S_0= c_0$, $S_1= c_1$. Tenemos según 2.4 que el polinomio característico definido por la matriz $A=\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ corresponde a $P(\lambda)= \lambda^2-\beta_1\lambda-\beta_0$.

Este polinomio puede tener dos raíces y distintas o iguales. Si las raíces λ_1 y λ_2 son distintas, la matriz T en 2.9 es una matriz diagonal de la forma:

$$T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 1 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

Además, por 2.3:

$$P=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow P_{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\\ -\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\end{pmatrix}$$

Por tanto, en 2.9:

$$X_n=P\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ c_0\end{pmatrix}+\ldots$$

$$P\cdot(T^{n-1}+T^{n-2}+\ldots+T^0)\cdot P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}f(n)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n=\begin{pmatrix}\lambda_1\lambda_1^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)-\lambda_2\lambda_2^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_1\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\\ \lambda_1^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)-\lambda_2^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_1\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\end{pmatrix}+\ldots$$

$$P\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-1}+\lambda_1^{n-2}+\ldots+1 & 0\\ 0 & \lambda_1^{n-1}+\lambda_1^{n-1}+\ldots+1\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}f(n)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n=\begin{pmatrix}\lambda_1\lambda_1^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)-\lambda_2\lambda_2^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_1\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\\ \lambda_1^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)-\lambda_2^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_1\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\end{pmatrix}+\ldots$$

$$P\cdot\begin{pmatrix}\frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1-1} & 0\\ 0 & \frac{\lambda_2^n-1}{\lambda_2-1}\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}f(n)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n=\begin{pmatrix}\lambda_1\lambda_1^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)-\lambda_2\lambda_2^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_1\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\\ \lambda_1^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)-\lambda_2^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_1\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\end{pmatrix}+\ldots$$

$$\begin{pmatrix}f(n)\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}\frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1-\lambda_2}-f(n)\frac{\lambda_2}{\lambda_2-1}\frac{\lambda_2^n-1}{\lambda_1-\lambda_2}\\ \frac{f(n)}{\lambda_1-1}\frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1-\lambda_2}-\frac{f(n)}{\lambda_2-1}\frac{\lambda_2^n-1}{\lambda_1-\lambda_2}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n=\begin{pmatrix}\lambda_1\lambda_1^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)-\lambda_2\lambda_2^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_1\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)+\ldots\\ \lambda_1^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)-\lambda_2^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_1\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)+\ldots\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}f(n)\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}\frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1-\lambda_2}-f(n)\frac{\lambda_2}{\lambda_2-1}\frac{\lambda_2^n-1}{\lambda_1-\lambda_2}\\ \frac{f(n)}{\lambda_1-1}\frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1-\lambda_2}-\frac{f(n)}{\lambda_2-1}\frac{\lambda_2^n-1}{\lambda_1-\lambda_2}\end{matrix}\Bigg)$$

Se asume en este desarrollo que ningún valor propio es igual a uno, si así fuera entonces. Finalmente, con esta restricción:

$$S_n=\lambda_1^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)-\lambda_2^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_1\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)+\ldots$$

$$\frac{f(n)}{\lambda_1-1}\frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1-\lambda_2}-\frac{f(n)}{\lambda_2-1}\frac{\lambda_2^n-1}{\lambda_1-\lambda_2} \tag{3.1}$$

En caso contrario:

$$X_n=\begin{pmatrix}\lambda_1\lambda_1^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)-\lambda_2\lambda_2^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_1\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)+\ldots\\ \lambda_1^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)-\lambda_2^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_1\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}f(n)\frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}\frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1-\lambda_2}-f(n)\frac{\lambda_2}{\lambda_2-1}\frac{\lambda_2^n-1}{\lambda_1-\lambda_2}\\ \end{matrix}\Bigg)$$

es decir:

$$S_n=\lambda_1^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)-\lambda_2^n\left(\frac{c_1}{\lambda_1-\lambda_2}-\lambda_1\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right) \tag{3.2}$$

Si $\lambda_1=\lambda_2$, entonces según 2.6:

$$T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 1 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

Además, por 2.7:

$$P=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

En 2.9:

$$X_n=P\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_1^n\end{pmatrix}\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix}c_1\\ c_0\end{pmatrix}+\ldots$$

$$P\cdot(T^{n-1}+T^{n-2}+\ldots+T^0)\cdot P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}f(n)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n=\begin{pmatrix}\lambda_1(\lambda_1^n c_0+n\lambda_1^{n-1}(c_1-\lambda_1 c_0))+\lambda_1^n(c_1-\lambda_1 c_0)\\ \lambda_1^n c_0+n\lambda_1^{n-1}(c_1-\lambda_1 c_0)\end{pmatrix}+\ldots$$

$$P\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-1}+\lambda_1^{n-2}+\ldots+1 & (n-1)\,\lambda_1^{n-2}+(n-2)\,\lambda_1^{n-3}+\ldots+1\\ 0 & \lambda_1^{n-1}+\lambda_1^{n-1}+\ldots+1\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}f(n)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n=\begin{pmatrix}\lambda_1(\lambda_1^n c_0+n\lambda_1^{n-1}(c_1-\lambda_1 c_0))+\lambda_1^n(c_1-\lambda_1 c_0)\\ \lambda_1^n c_0+n\lambda_1^{n-1}(c_1-\lambda_1 c_0)\end{pmatrix}+\ldots$$

$$P\cdot\begin{pmatrix}\frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1-1} & \frac{1}{(\lambda_1-1)^2}-\frac{1}{\lambda_1}\frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^2}\,(n+\lambda_1-n\lambda_1)\\ 0 & \frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1-1}\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}f(n)\\ 0\end{pmatrix}$$

Este resultado se justifica pues:

$$\sum_{j=1}^{n-1}(j\cdot x^{j-1})=\begin{cases}\frac{1}{2}\,n\,(n-1) & \text{si}\quad x=1\\ \frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x}\frac{x^n}{(x-1)^2}\,(n+x-nx) & \text{si}\quad x\neq 1\end{cases}$$

(3.3)

Lo anterior es comprobable por inducción matemática. Luego:

$$\Rightarrow X_n=\begin{pmatrix}\lambda_1(\lambda_1^n c_0+n\lambda_1^{n-1}(c_1-\lambda_1 c_0))+\lambda_1^n(c_1-\lambda_1 c_0)\\ \lambda_1^n c_0+n\lambda_1^{n-1}(c_1-\lambda_1 c_0)\end{pmatrix}+\ldots$$

$$\begin{pmatrix}\frac{f(n)}{\lambda_1-1}\,(\lambda_1(\lambda_1^n c_0+f(n)\,\lambda_1(\frac{1}{(\lambda_1-1)^2}-\frac{1}{\lambda_1}\frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^2}(n+\lambda_1-n\lambda_1))\\ f(n)\,\lambda_1(\frac{1}{(\lambda_1-1)^2}-\frac{1}{\lambda_1}\frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^2}(n+\lambda_1-n\lambda_1))\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n=\begin{pmatrix}\lambda_1(\lambda_1^n c_0+n\lambda_1^{n-1}(c_1-\lambda_1 c_0))+\lambda_1^n(c_1-\lambda_1 c_0)+\ldots\\ \lambda_1^n c_0+f(n)\,\lambda_1(\frac{1}{(\lambda_1-1)^2}-\frac{1}{\lambda_1}\frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^2}(n+\lambda_1-n\lambda_1))+n\lambda_1^{n-1}(c_1-\lambda_1 c_0)\end{pmatrix}$$

$$\frac{f(n)}{\lambda_1-1}\,(\lambda_1^n-1)+f(n)\,\lambda_1(\frac{1}{(\lambda_1-1)^2}-\frac{1}{\lambda_1}\frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^2}(n+\lambda_1-n\lambda_1))$$

Finalmente:

$$S_n=\lambda_1^n c_0+f(n)\left(\frac{1}{(\lambda_1-1)^2}-\frac{1}{\lambda_1}\frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^2}(n+\lambda_1-n\lambda_1)\right)+n\lambda_1^{n-1}(c_1-\lambda_1 c_0)$$

(3.4)

si $\lambda_1\neq 1$, en caso contrario, $\sum_{j=1}^{n-1}(j\cdot x^{j-1})=\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ y $\lambda_1^{n-1}+\lambda_1^{n-2}+\ldots+1=n$ es decir:

$$X_n=\begin{pmatrix}\lambda_1(\lambda_1^n c_0+n\lambda_1^{n-1}(c_1-\lambda_1 c_0))+\lambda_1^n(c_1-\lambda_1 c_0)+f(n)n+\frac{1}{2}\,f(n)n\,\lambda_1(n-1)\\ \lambda_1^n c_0+\frac{1}{2}\,f(n)n(n-1)+n\lambda_1^{n-1}(c_1-\lambda_1 c_0)\end{pmatrix}$$

de donde:

$$S_n=\lambda_1^n c_0+\frac{1}{2}f(n)n(n-1)+n\lambda_1^{n-1}(c_1-\lambda_1 c_0)$$

(3.5)

Ejemplos

Ejemplo 1. *Definamos la sucesión recursiva* $S_{n+2}=-S_{n+1}+6S_n+8n-10$ *sujeta a las condiciones iniciales* $S_0=2, S_1=1$*. Formando el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases}S_{n+2}=-S_{n+1}+6S_n+8n-10\\ S_{n+1}=S_{n+1}\end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ *y las condiciones iniciales están dadas por* $X_0=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$*. El polinomio característico de la matriz A es:* $P(\lambda)=\lambda^2+\lambda-6$ *cuyas raíz son* $\lambda_1=2$ *y* $\lambda_2=-3$*. Por 3.1 tenemos que* S_n *corresponde a:*

$$S_n=\frac{8}{5}2^n n-2n+\frac{2}{5}(-3)^n n-2^n+\frac{1}{2}(-3)^n+\frac{5}{2}\forall n, n\in IN\cup\{0\}$$

Ejemplo 2. *Definamos la sucesión recursiva* $S_{n+2}=2S_{n+1}-S_n+3^n$ *sujeta a las condiciones iniciales* $S_n=1$, $S_n=3$*. Formando el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases}S_{n+2}=2S_{n+1}-S_n\\ S_{n+1}=S_{n+1}\end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ *y las condiciones iniciales están dadas por* $X_0=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$*. El polinomio característico de la matriz es: cuya única raíz es Por 3.5 tenemos que corresponde a:*

$$S_n = 2n+\frac{1}{2}3^n n(n-1)+1\,\forall n, n\in IN\cup\{0\}$$

RELACIONES DE RECURRENCIA LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE ORDEN TRES

Método de resolución

Dada la sucesión:

$$S_{n+3}=\beta_2 S_{n+2}+\beta_1 S_{n+1}+\beta_0 S_n + f(n)$$

sujeta a las condiciones iniciales $S_0=c_0$, $S_1=c_1$ y $S_2=c_2$ el polinomio característico definido para la matriz A según 2.4 está dado por: $P(\lambda)=\lambda^3-\beta_2\lambda^2-\beta_1\lambda-\beta_0$.

Las raíces λ_1, λ_2, λ_3 de este polinomio derivan tres casos posibles: que sean distintas dos a dos, que dos de ellas sean iguales, o bien, que las tres raíces sean iguales. A continuación, resolveremos cada caso por separado. Si las raíces son distintas dos a dos, la matriz T en 2.9 es la matriz diagonal:

$$T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

Por 2.3:

$$P=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\lambda_2+\lambda_3-\lambda_2\lambda_3-1} & \frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3-\lambda_2\lambda_3-1} & -\lambda_2\frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3-\lambda_2\lambda_3-1}\\ -\frac{1}{\lambda_2-\lambda_3-\lambda_2^2+\lambda_2\lambda_3} & \frac{\lambda_3+1}{\lambda_2-\lambda_3-\lambda_2^2+\lambda_2\lambda_3} & -\frac{\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3-\lambda_2^2+\lambda_2\lambda_3}\\ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_3+\lambda_3^2-\lambda_2\lambda_3} & -\frac{\lambda_2+1}{\lambda_2-\lambda_3+\lambda_3^2\square\lambda_2\lambda_3} & \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_3+\lambda_3^2-\lambda_2\lambda_3}\end{pmatrix}$$

Luego, en 2.9:

$$X_n = P\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^n & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^n\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}c_2\\ c_1\\ c_0\end{pmatrix}+\cdots$$

$$P\cdot\left(T^{n-1}+T^{n-2}+\cdots+T^0\right)P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}f(n)\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n=\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \lambda_1^n\left(\frac{c_2}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}+\lambda_2\lambda_3\frac{c_0}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}\right)+\cdots\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \lambda_2^n\left(\frac{c_2}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_1+\lambda_1}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\lambda_1\lambda_3\frac{c_0}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}\right)+\cdots\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \lambda_3^n\left(\frac{c_2}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\lambda_1\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}\right)\end{pmatrix}+\cdots$$

$$P\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-1}+\lambda_1^{n-2}+\cdots+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^{n-1}+\lambda_2^{n-2}+\cdots+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3^{n-1}+\lambda_3^{n-2}+\cdots+1\end{pmatrix}P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}f(n)\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n=\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \lambda_1^n\left(\frac{c_2}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}+\lambda_2\lambda_3\frac{c_0}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}\right)+\cdots\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \lambda_2^n\left(\frac{c_2}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_1+\lambda_3}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\lambda_1\lambda_3\frac{c_0}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}\right)+\cdots\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \lambda_3^n\left(\frac{c_2}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\lambda_1\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}\right)\end{pmatrix}+\cdots$$

$$P\cdot\begin{pmatrix}\frac{\lambda_1^n\lambda 1}{\lambda_1\lambda 1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\lambda_2^n\lambda 1}{\lambda_2\lambda 1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3^n\lambda 1}{\lambda_3\lambda 1}\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}f(n)\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_n=\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \lambda_1^n\left(\frac{c_2}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}+\lambda_2\lambda_3\frac{c_0}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}\right)+\cdots\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \lambda_2^n\left(\frac{c_2}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_1+\lambda_3}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\lambda_1\lambda_3\frac{c_0}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}\right)+\cdots\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\\ \lambda_3^n\left(\frac{c_2}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\lambda_1\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}\right)\end{pmatrix}+\cdots$$

$$\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \frac{f(n)}{\lambda_1\lambda 1}\frac{\lambda_1^n\lambda 1}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}+\frac{f(n)}{\lambda_2\lambda 1}\frac{\lambda_2^n\lambda 1}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\frac{f(n)}{\lambda_3\lambda 1}\frac{\lambda_3^n\lambda 1}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3} \end{pmatrix}$$

De acuerdo con lo anterior:

$$\begin{aligned} S_n &= \lambda_1^n\left(\frac{c_2}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}+\lambda_2\lambda_3\frac{c_0}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}\right)+\cdots \\ &\lambda_2^n\left(\frac{c_2}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_1+\lambda_3}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\lambda_1\lambda_3\frac{c_0}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}\right)+\cdots \\ &\lambda_3^n\left(\frac{c_2}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\lambda_1\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}\right)+\cdots \\ &\frac{f(n)}{\lambda_1\lambda 1}\frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}+\frac{f(n)}{\lambda_2\lambda 1}\frac{\lambda_2^n-1}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\frac{f(n)}{\lambda_3\lambda 1}\frac{\lambda_3^n-1}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3} \end{aligned} \tag{4.1}$$

la cual es válida siempre y cuando ninguno de los valores propios sea igual a uno, si para algún i, $1 \leq i \leq 3$, $\lambda_i = 1$, entonces $\lambda_i^{n-1} + \lambda_i^{n-2} + ... + 1 = n$ y se recurre al mismo procedimiento aplicado para obtener la expresión 4.1, se obtiene:

$$\begin{aligned} S_n &= \lambda_1^n\left(\frac{c_2}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}+\lambda_2\lambda_3\frac{c_0}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}\right)+\cdots \\ &\lambda_2^n\left(\frac{c_2}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_1+\lambda_3}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\lambda_1\lambda_3\frac{c_0}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}\right)+\cdots \\ &\lambda_3^n\left(\frac{c_2}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\lambda_1\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}\right)+\cdots \\ &\frac{f(n)n}{\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3}+\frac{f(n)}{\lambda_2\lambda 1}\frac{\lambda_2^n-1}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\frac{f(n)}{\lambda_3\lambda 1}\frac{\lambda_3^n-1}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3} \end{aligned} \tag{4.2}$$

En un segundo caso, si $\lambda_1 = \lambda_3$ entonces por 2.6 la matriz T en 2.9 corresponde a:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Además, según 2.7:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1 & 1 & \lambda_2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{2\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{\lambda_2(\lambda_2-2\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \\ \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & -\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \\ \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{-2\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} & \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, en 2.9:

$$X_n = P\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\cdot P^{-1}\cdot\begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}+\cdots$$

$$P\cdot\left(T^{n-1}+T^{n-2}+\cdots+T^0\right)\cdot P^{-1}\cdot\begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_n = P\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\cdot P^{-1}\cdot\begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}+\cdots$$

$$P\cdot\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1-1} & \frac{1}{(\lambda_1-1)^2}-\frac{1}{\lambda_1}\frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^2}\left(n+\lambda_1-n\lambda_1\right) & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_2^n-1}{\lambda_2-1} \end{pmatrix}\cdot P^{-1}\cdot\begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al resolver este producto y tomar la última fila de la matriz resultante, se concluye que:

$$\begin{aligned} S_n &= \lambda_2^n\left(\frac{c_2}{\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2}+\lambda_1^2\frac{c_0}{\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2}-2\lambda_1\frac{c_1}{\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2}\right)+\cdots \\ &\lambda_1^n\left(c_0\frac{\lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2}-\frac{c_2}{\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2}+2\lambda_1\frac{c_1}{\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2}\right)+\cdots \\ &n\lambda_1^{n-1}\left(\frac{c_2}{\lambda_1-\lambda_2}-c_1\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}+\lambda_1\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_1-\lambda_2}\right)+\cdots \\ &\lambda_2^n\left(\frac{c_2}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\lambda_1\lambda_2\frac{c_0}{\lambda_3^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}\right)+\cdots \\ &n\lambda_1^{n-1}\left(\frac{c_2}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}-c_1\frac{\lambda_1+\lambda_3}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}+\lambda_1\lambda_3\frac{c_0}{\lambda_2^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3}\right)+\cdots \\ &f(n)\frac{\frac{1}{(\lambda_1-1)^2}\lambda\frac{1}{\lambda_1}\frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^2}(n+\lambda_1-n\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}-\frac{f(n)}{\lambda_1-1}\frac{\lambda_1^n-1}{\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2}+\frac{f(n)}{\lambda_2-1}\frac{\lambda_2^n-1}{\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Esta fórmula se puede utilizar cuando todos los valores propios son distintos de uno, en caso contrario si $\lambda_1 = 1$, $\sum_{j=1}^{n}(j\cdot x^{j-1}) = \frac{1}{2}n\,(n-1)$ y $\lambda_1^{n-1}+\lambda_1^{n-2}+...+1=n$ posteriormente el procedimiento de resolución es equivalente a lo expuesto con anterioridad. Podría ocurrir también que $\lambda_2 = 1$, en dicho caso simplemente $\lambda_1^{n-1}+\lambda_1^{n-2}+...+1$, se sustituye por n

Por último, si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ distintos de uno, tendríamos por 2.6 que la matriz T en 2.9 es:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Además, de acuerdo con 2.7:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 \\ 1 & -2\lambda_1 & \lambda_1^2 \end{pmatrix}$$

Entonces en 2.9:

$$X_n = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda_1^{n-2} \\ 0 & \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$P \cdot \left(T^{n-1} + T^{n-2} + \cdots + T^0\right) \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para continuar con este desarrollo, es necesario utilizar:

$$\sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{j(j-1)}{2} \cdot x^{j-2} \right) = \begin{cases} \frac{1}{6} n(n-1)(n-2) & \text{si} \quad x = 1 \\ -\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{2x^2}\frac{x^n}{(x-1)^3} \times \cdots & \text{si} \quad x = 1 \\ \left(-n - 3nx^2 - 2n^2x + n^2x^2 + 4nx + n^2 + 2x^2\right) & \end{cases}$$

(4.4)

lo cual se puede demostrar sin mayor dificultad por inducción matemática. Luego:

$$X_n = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda_1^{n-2} \\ 0 & \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$P \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1 - 1} & \frac{1}{(\lambda_1-1)^2}\lambda \frac{1}{\lambda_1}\frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^2}\left(n + \lambda_1 - n\lambda_1\right) & \\ 0 & \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1 - 1} & \cdots \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2\lambda_1^2}\frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^3}\left(n^2\lambda_1^2 - 2n^2\lambda_1 + n^2 - 3n\lambda_1^2 + 4n\lambda_1 - n + 2\lambda_1^2\right) - \frac{1}{(\lambda_1\lambda 1)^3} \\ \frac{1}{(\lambda_1-1)^2} - \frac{1}{\lambda_1}\frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^2}\left(n + \lambda_1 - n\lambda_1\right) \\ \frac{\lambda_1^n - 1}{\lambda_1 - 1} \end{matrix} \Bigg) \cdots$$

$$\cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(n) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al tomar la última fila de este producto se obtiene:

$$S_n = \lambda_1^n c_0 + n\lambda_1^{n-1}\left(c_1 - \lambda_1 c_0\right) + \frac{1}{2}n\lambda_1^{n-2}(n-1)\left(c_0\lambda_1^2 - 2c_1\lambda_1 + c_2\right) + \cdots$$

$$f(n)\left(\frac{1}{(\lambda_1-1)^3} - \frac{1}{2\lambda_1^2}\frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1-1)^3}\left(n^2\lambda_1^2 - 2n^2\lambda_1 + n^2 - 3n\lambda_1^2 + 4n\lambda_1 - n + 2\lambda_1^2\right)\right)$$

(4.5)

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ por 3.3 y 4.4 se reemplaza $\sum_{j=1}^{n-1}\left(j \cdot \lambda_1^{j-1}\right) = \frac{1}{2}n(n-1), \sum_{j=2}^{n-1}\left(\frac{j(j-1)}{2} \cdot \lambda_1^{j-2}\right) = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ y $\lambda_1^{n-1} + \lambda_1^{n-2} + \ldots + 1 = n$ en 2.9, lo que nos da como resultado:

$$S_n = \lambda_1^n c_0 + n\lambda_1^{n-1}\left(c_1 - \lambda_1 c_0\right) + \frac{1}{2}n\lambda_1^{n-2}(n-1)\left(c_0\lambda_1^2 - 2c_1\lambda_1 + c_2\right) + \cdots$$

$$f(n)\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

(4.6)

Ejemplos

Ejemplo 1. *Definimos la sucesión recursiva* $S_{n+3} = S_{n+3} + S_{n+2} + 2S_{n+1} + n^2 + 3^n$ *sujeta a las condiciones* $S_0 = 1$, $S_1 = 1$, $S_2 = 1$. *Formando el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} S_{n+3} = S_{n+2} + S_{n+1} + 2S_n + n^2 + 3^n \\ S_{n+2} = S_{n+2} \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y las condiciones iniciales están dadas por* $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El polinomio característico de la matriz A es: $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2$ *cuyas raíces son* $2, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$. *Por 4.1 se tiene que corresponde a:*

$$S_n = \frac{2}{21}n^2\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{21}n^2\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{21}3^n\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

$$\frac{2}{21}3^n\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{7}i\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

$$-\frac{1}{7}i\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

$$\frac{1}{21}i3^{n+\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{21}i3^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} \square \frac{1}{2}\right)^n + \cdots$$

$$\frac{1}{7}2^n n^2 + \frac{3}{7}2^n - \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{3}3^n + \frac{1}{7}6^n + \cdots$$

$$\frac{1}{21}i\sqrt{3}n^2\left(-\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{21}i\sqrt{3}n^2\left(\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^n \forall n, n \in IN \cup \{0\}$$

Ejemplo 2. *Definamos la sucesión recursiva* $S_{n+3} = 5S_{n+2} - 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + 9S_n - 5^n + \sin n$ *sujeta a las condiciones iniciales* $S_0 = 1$, $S_1 = 0$, $S_2 = -1$. *Formando el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} S_{n+3} = 5S_{n+2} - 3S_{n+1} - 9S_n - 5^n + \sin n \\ S_{n+2} = S_{n+2} \\ S_{n+1} = S_{n+1} \end{cases}$$

se tiene que la matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y las condiciones iniciales están dadas por* $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *El polinomio característico de la matriz A es:*

$P(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+3\lambda+9$ *cuyas raíces son* $\lambda_1=3$ *de multiplicidad algebraica dos y* $\lambda_2=-1$ *de multiplicidad algebraica uno. Por 4.3 tenemos que* S_n *corresponde a:*

$$S_n = \tfrac{1}{8}\sin n - \tfrac{1}{3}3^n n - \tfrac{1}{24}15^n n - \tfrac{1}{32}(-1)^n \sin n - \tfrac{3}{32}3^n \sin n + \tfrac{1}{2}(-1)^n + \cdots$$
$$\tfrac{1}{2}3^n + \tfrac{1}{32}(-5)^n - \tfrac{1}{8}5^n + \tfrac{3}{32}15^n + \tfrac{1}{24}3^n n \sin n \; \forall n, n \in IN \cup \{0\}$$

Conclusiones

El algoritmo desarrollado en este trabajo finaliza una serie de resultados conducentes a la resolución de relaciones de recurrencia lineales con coeficientes constantes tanto homogénea como no homogénea.

Los resultados permiten programar formas de resolución de recursividades de una manera rápida y eficiente. A futuro se espera desarrollar una aplicación que se fundamente en estos insumos teóricos para solucionar completamente el problema.

Referencias

Apostol, T. (1985). *Calculus*. México: Reverté.

Hill, R. (1997). *Álgebra lineal elemental con aplicaciones*. México: Prentice-Hall.

Hoffman, K. y Kunze, R. (1971). *Álgebra lineal*. México: Prentice-Hall.

Johnsonbaugh, R. (1988). *Matemáticas Discretas*. México: Iberoamérica.

Vílchez, E. y Monge, J. (2001). Valores propios y las sucesiones definidas de forma recursiva. *Revista Virtual de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2*(2).

Vílchez, E. (2004). Resolución de sucesiones definidas por una relación de recurrencia homogénea lineal con valores propios de multiplicidad algebraica mayor estricta que uno. *Revista Virtual de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica, 5*(2).