UNIVERSIDAD NACIONAL DE COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

Conocimiento sobre la noción clásica de probabilidad en profesores en formación inicial de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de las matemáticas de la Universidad Nacional de Costa Rica durante el II Ciclo del 2021

Trabajo Final de Graduación sometido a consideración del Tribunal Evaluador como requisito parcial para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de las matemáticas

Estudiante*: **Bach. Jesús Daniel Cruz Quesada***

Comité asesor:

Dr. Christian Alfaro Carvajal (Cotutor)

MSc. Hellen Guillen Oviedo (Cotutora)

Dr. José Andrey Zamora Araya (Asesor)

Dr. Miguel Picado Alfaro (Asesor)

Campus Omar Dengo

Heredia, Costa Rica

Este trabajo final de graduación ha sido aceptado y aprobado por el Tribunal Examinador de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional, como requisito parcial para optar al grado de Licenciatura en la Enseñanza de las matemáticas

Representante del Decanato
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales __________________________

Representante de la Dirección
Escuela de Matemáticas __________________________

Dr. Christian Alfaro Carvajal __________________________
Cotutor

M.Sc. Hellen Guillen Oviedo __________________________
Cotutora

Dr. José Andrey Zamora Araya __________________________
Asesor

Dr. Miguel Picado Alfaro __________________________
Asesor

Bach. Jesús Daniel Cruz Quesada __________________________
Estudiante

Agradecimientos

Agradezco sinceramente a mis tutores, el Doctor Christian Alfaro Carvajal y a la Máster Hellen Guillén Oviedo, por su inquebrantable compromiso y apoyo a lo largo de mi tesis. Su constante orientación y paciencia fueron fundamentales para mi desarrollo académico. Además, quiero expresar mi gratitud a mis lectores, el Doctor José Andrey Zamora Araya y el Doctor Miguel Picado Alfaro, por dedicar su valioso tiempo y demostrar su disposición para contribuir a este trabajo. Sus comentarios y sugerencias fueron de gran valor para la culminación de este proyecto.

Índice de contenidos

Índice de figuras

Índice de tablas

1. CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta el planteamiento de la investigación, la cual está estructurada en cinco apartados. El primer apartado, titulado *1.1 Área problemática*, se comienza con una introducción que contextualiza la investigación dentro del área problemática y se subdivide en tres secciones. En la primera sección, *1.1.1 La noción clásica de probabilidad en la teoría de probabilidad* se examina la relevancia del enfoque clásico de probabilidad en el contexto de la disciplina de matemáticas, particularmente en la teoría de probabilidad. En la segunda sección, *1.1.2 La noción clásica de probabilidad en las matemáticas Escolar y en el currículo matemático de la educación secundaria en Costa Rica*, abarca el rol de este significado de probabilidad en las matemáticas escolar y, de manera particular, en los Programas de Estudio de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública (MEP) en Costa Rica. Finalmente, en la tercera sección, *1.1.3 La noción clásica de probabilidad en la formación inicial de los profesores de matemáticas y en la carrera de Enseñanza de las matemáticas de la Universidad Nacional de Costa Rica*, se presenta una revisión bibliográfica sobre el papel de este enfoque probabilístico en la formación inicial de profesores, enfatizando en lo que dicta el Plan de Estudios de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de las matemáticas de la Universidad Nacional (UNA).

En el segundo apartado, *1.2 Antecedentes sobre investigaciones relacionadas el conocimiento de los profesores de matemáticas en general*, se expone el estado de la cuestión destacando investigaciones a nivel nacional e internacional relacionadas con el conocimiento de los profesores de matemáticas tanto en formación inicial como en servicio, específicamente, en el área de probabilidad. En el tercer apartado, *1.3 El conocimiento del profesor de matemáticas para la enseñanza de la noción clásica de probabilidad*, se plantea una síntesis acerca de la pertinencia del estudio a partir de los apartados anteriores. En el cuarto apartado, *1.4 El problema de investigación y la pertinencia del trabajo*, se muestra la pregunta de investigación que, finalmente, induce al último apartado, *1.5 Objetivos de la investigación,* en el que se describe el objetivo general y los objetivos específicos.

1.1. ÁREA PROBLEMÁTICA

El tema central de esta investigación se ubica en el ámbito del conocimiento del profesor de matemáticas en formación inicial. El interés por analizar el conocimiento del docente constituye una temática valiosa para la comunidad científica en educación matemáticas, por el rol crucial de este dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, con especial distinción, de la noción clásica de probabilidad (Ball et al., 2008).

De acuerdo con Hill et al. (2007) una de las funciones del profesor reside en implementar una enseñanza efectiva para que el estudiante adquiera y construya nuevos conocimientos. Para que esto suceda, es esencial que el docente se apropie y domine completamente el conocimiento que va a impartir antes de iniciar el proceso de enseñanza y aprendizaje con los estudiantes (Ball et al., 2008). Asimismo, uno de los principios de la enseñanza de las matemáticas indicada por el *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM] (2000) es que los docentes deben conocer y comprender profundamente las matemáticas que están enseñando, y poder aprovechar ese conocimiento en sus labores de enseñanza.

Por lo tanto, para alcanzar un proceso de enseñanza y aprendizaje efectivo se requiere de un docente que se apropie del tema, siendo esta una de las competencias esenciales para cualquier docente de matemáticas. No obstante, como menciona Shulman (1986; 1987), ser profesor no se resume sólo en habilidades cognoscitivas de la materia, sino, que engloba un conocimiento especializado y complejo que incluye la complementariedad de distintos saberes tales como: el pedagógico, el contenido, el currículo, el pedagógico del contenido, sobre el aprendizaje, sobre el contexto educacional, entre otros.

Por esta razón, las investigaciones en torno al conocimiento del profesor de matemáticas poseen variedad de modelos o teorías que buscan conceptualizar las competencias pedagógicas y matemáticas de los docentes. Entre los diversos modelos desarrollados, se tienen: Conocimiento base para la enseñanza de Shulman (1986; 1987), *Mathematics Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball et al. (2008) y *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) de Carrillo et al. (2018). Al igual que Shulman (1987), los modelos MKT (Ball et al., 2008) y MTSK (Carrillo et al., 2018) dividen el conocimiento del profesor en: conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido.

Además, se resalta la importancia de llevar a cabo investigaciones relacionadas con el conocimiento de los docentes de matemáticas, un aspecto que ha sido enfatizado por varios autores, incluyendo a Even y Ball (2009). Estos autores destacan tres consideraciones fundamentales. En primer lugar, subrayan la necesidad de prestar atención a la problemática del aprendizaje de los estudiantes en matemáticas, lo cual implica un enfoque específico en los docentes como actores clave en este proceso. En segundo lugar, enfatizan que cualquier esfuerzo dirigido a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no puede tener éxito sin una atención paralela a las oportunidades de aprendizaje proporcionadas a sus docentes. Por último, señalan que la formación profesional de los docentes emerge como un elemento crucial en el esfuerzo continuo por construir un sistema efectivo en la enseñanza de las matemáticas.

Asimismo, Climent et al. (2014) subrayan argumentos que enfatizan la importancia de esta línea de investigación. Entre las ideas expuestas por estos autores se encuentra la capacidad de identificar y comprender las demandas del conocimiento que requiere un profesor, con el objetivo de abordar los obstáculos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, esta línea de investigación promueve una reflexión colectiva en las instituciones formadoras y una introspección individual por parte del profesor, todo ello en aras de mejorar el conocimiento necesario para enseñar matemáticas de manera competente. En última instancia, los estudios en esta área buscan identificar los conocimientos esenciales que caracterizan a un profesor de matemáticas competente.

El objeto de estudio de esta investigación es el conocimiento profesional del profesor de matemáticas en formación inicial de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA), caracterizado a través del modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) de Carrillo et al. (2018) en el tema de la noción clásica de probabilidad, específicamente en el *Knowledge of Topic*s (KoT).

1.1.1. La noción clásica de probabilidad en la teoría de probabilidad

La estadística y la probabilidad han recibido diversas interpretaciones y han estado en medio de debates, sobre si estas corresponden a ramas de las matemáticas. Wild et al. (2018) establecen que la estadística y la probabilidad son dos disciplinas separadas y distintas de las matemáticas, que aportan a otros campos de la ciencia. De acuerdo con estos autores, la estadística se define como la ciencia de aprender de los datos, medir, controlar y comunicar la incertidumbre. Por su parte, la *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (GAISE) mencionan que la probabilidad puede ser vista como un valor matemático que intenta cuantificar la incertidumbre, el cual se encuentra respaldado por datos o tendencias que ayudan a comprender un fenómeno (Franklin et al., 2007).

Además, Casella y Berger (2002) resaltan que la teoría de la probabilidad es la base sobre la cual se construye la estadística, proporcionando un medio para modelar poblaciones, experimentos o cualquier fenómeno aleatorio. En la teoría de probabilidad existen diferentes enfoques, entre ellos, el clásico, el frecuencial y el bayesiano. Los primeros pasos de la teoría de probabilidad se llevaron a cabo a partir del enfoque clásico vinculado a los juegos de azar y, de este, empezaron a surgir los demás enfoques (Batanero, 2005).

La definición clásica de probabilidad fue dada por Abraham de Moivre en 1718 y luego fue refinada por Laplace en 1814 (Batanero, 2020). La noción clásica de probabilidad es una fracción de la cual el numerador es el número de posibilidades por las cuales puede ocurrir un evento y el denominador el número de casos posibles para el experimento, esta fracción también se le conoce con el nombre de Regla de Laplace (Batanero et al., 2005). Sin embargo, este enfoque es muy limitado pues, supone implícitamente que los resultados individuales son igualmente probables (equiprobabilidad), además, que solo se puede emplear en experimentos con un número finito de posibilidades lo cual está lejos de las aplicaciones reales (Batanero, 2001; Borovcnik y Kapadia, 2014; Gea et al., 2017). En resumen, el enfoque clásico se encuentra en juegos de azar, lanzamientos de moneda, lanzamiento de dados, bolas en una urna, entre otros; siendo esta la principal aplicación de la noción clásica (Batanero y Díaz, 2007).

Por otra parte, el NCTM (2000) resalta que las nociones de probabilidad (clásica y frecuencial) se encuentran conectadas con otras áreas de las matemáticas, especialmente con números, teoría de conjuntos y geometría. Además, las ideas de probabilidad sirven como base para la recopilación e interpretación de datos, y la conexión de las matemáticas con la vida cotidiana y con otras áreas de la ciencia (NCTM, 2000).

Por lo tanto, la noción clásica de probabilidad corresponde a uno de los enfoques pioneros en la teoría de probabilidad. También, es el enfoque menos utilizado en la actualidad debido a la poca aplicación en fenómenos naturales o sociales en donde asumir la equiprobabilidad se vuelve complejo. Sin embargo, es utilizado en la enseñanza de las matemáticas para introducir las nociones de azar mediante el cálculo de sucesos o eventos aleatorios. Finalmente, la postura que se toma para esta investigación es que la probabilidad es una de las áreas de conocimiento que se establece en las matemáticas escolar.

1.1.2 La noción clásica de probabilidad en las matemáticas Escolar y en el currículo matemático de la educación secundaria en Costa Rica

La enseñanza de la estadística y probabilidad ocupa un espacio significativo dentro de los programas de estudio de matemáticas en diferentes partes del mundo, dicha temática se inicia en los primeros años de primaria y continúa hasta la secundaria (Batanero, 2009). Algunas justificantes de su incorporación dentro de los currículos escolares, aludidas por diferentes autores apuntan a su utilidad en la sociedad contemporánea (Batanero, 2006; Wild et al., 2018; Zieffler et al., 2018).

Actualmente, existe gran cantidad de datos e información presentes en diferentes contextos —negocios, política, medios de comunicación, vida cotidiana— por lo que se requieren personas capaces de pensar, interactuar y tomar decisiones en escenarios donde la aleatoriedad y la incertidumbre son omnipresentes y, para hacerle frente, es necesario el empleo apropiado del razonamiento estadístico y probabilístico (Batanero, 2019; Lehrer y English, 2018; Pfannkuch et al., 2016). En este sentido, la educación estocástica, entendida como la educación en probabilidad y estadística, busca formar en los educandos una alfabetización o una cultura estadística (Estrada et. al., 2004, Batanero, 2004, 2019; Gal, 2002).

De acuerdo con Franklin et al. (2007) y NCTM (2000) en relación con los enfoques de probabilidad en las matemáticas escolar, se busca que los estudiantes comprendan y apliquen los conceptos básicos de probabilidad para evitar la consolidación de un sesgo hacia el determinismo e inculcar las nociones de azar e incertidumbre.

Por ejemplo, en la educación secundaria se suele trabajar con problemas que involucren lanzar una moneda justa, en el cual la probabilidad de que salga escudo o corona es la misma, incluso, si diez lanzamientos seguidos han dado como resultado corona; pero, para muchos estudiantes es contradictorio que el onceavo lanzamiento tenga solo un 50 por ciento de probabilidad de ser corona (Franklin et al., 2007).

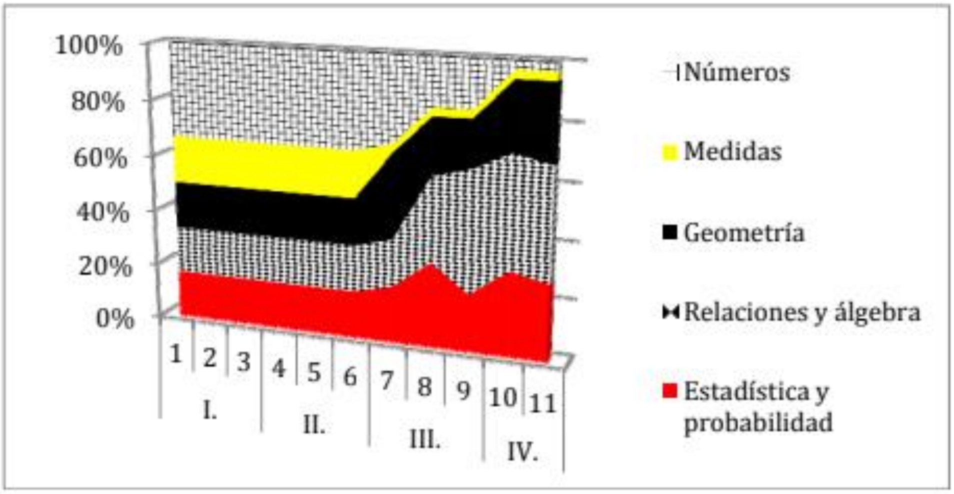
Por lo tanto, las nociones de probabilidad (clásica, frecuencial y bayesiana) no siempre son intuitivas, por lo que es necesario incluirlas en los programas de estudio de matemáticas con la finalidad de afinar y desarrollar dichas nociones (Greer, 2014). Como menciona Pfannkuch et al. (2016) la forma en que se concibe el concepto de probabilidad ya sea desde una perspectiva clásica, frecuencial o bayesiana, es fundamental para el pensamiento estocástico y para evitar los sesgos deterministas.

Dentro de este orden de ideas, en los Programas de Estudio de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, se establecen cinco áreas del conocimiento matemático que estructuran las matemáticas escolares en la educación primaria y en la educación secundaria: Números, Medidas, Geometría, Relaciones y Álgebra y, Estadística y Probabilidad. Cada una de estas áreas se imparten en cada ciclo educativo: I Ciclo (los tres primeros años de primaria, las edades oscilan entre los 6 a 9 años), II Ciclo (los últimos tres años de primaria, las edades oscilan entre los 10 a 12 años), III Ciclo (los tres primeros años de secundaria, las edades oscilan entre los 13 a 15 años) y Ciclo Diversificado o IV Ciclo (los últimos dos años de secundaria, las edades oscilan entre los 16 a 17 años) (MEP, 2012).

Los Programas de Estudio de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica entraron en vigor en el año 2012 (MEP, 2012). Además, el área de estadística y probabilidad está incluida en todos los ciclos escolares y en las pruebas nacionales de Bachillerato que, en currículos anteriores, no se incluía y, por ello, la mayoría de los docentes no enseñaban dicha área (Ruíz, 2017). Para efectos de esta investigación, es relevante visualizar el peso que ocupa la estadística y la probabilidad en dichos programas de estudio, en donde se puede apreciar que es constante en I y II ciclos, aumentando en el III ciclo y en el Diversificado (Figura 1).

Figura 1.

Las cinco áreas matemáticas en los cuatro ciclos educativos



Nota. Tomado de MEP (2012, p.49)

La enseñanza de la estadística y probabilidad se encuentra orientada a la organización e interpretación de la información en diversos contextos con la finalidad de desarrollar en los estudiantes el pensamiento aleatorio y forjar habilidades para afrontar el azar, lo impredecible y la incertidumbre (MEP, 2012).

Por su parte, un tema que se encuentra inmerso en el bloque de estadística y probabilidad corresponde a la noción clásica de probabilidad o Regla de Laplace, el cual se incluye en sexto año de primaria (II Ciclo), octavo año de secundaria (III Ciclo) y, finalmente, se retoma en el ciclo diversificado en décimo año (MEP, 2012). Asimismo, el MEP (2012) incluye la noción clásica de probabilidad de forma implícita en el I Ciclo, pues, se trabaja en la identificación de puntos y eventos muestrales. Igualmente, en noveno año (III Ciclo), se trabaja la definición clásica de probabilidad de forma implícita, a partir del enfoque frecuencial, es decir, se busca que los estudiantes identifiquen eventos para los cuales su probabilidad no puede ser determinada empleando la definición clásica de probabilidad.

En la tabla 1 se describen de forma detallada los conocimientos y las habilidades específicas descritas por el MEP (2012), en relación con el enfoque clásico de probabilidad en sexto año y octavo año, que son los años escolares donde se incluye este enfoque de forma explícita.

Tabla 1.

Enfoque clásico de probabilidad para la EGB en los Programas de Estudio de Matemáticas del MEP

<table>
<tr><th>Conocimientos</th><th>Habilidades específicas</th></tr>
<tr><td colspan="2">II Ciclo EGB: 6° año</td></tr>
<tr><td>Definición clásica o laplaciana de probabilidad.
Propiedades de las probabilidades:
• La probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1 inclusive.
• La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0.</td><td>1. Determinar la probabilidad de un evento como la proporción de resultados favorables del evento entre el total de resultados.
2. Deducir mediante situaciones concretas los valores que puede tomar la probabilidad de un evento cualquiera, de un evento seguro y de un evento imposible.
3. Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">III Ciclo EGB: 8° año</td></tr>
<tr><td>Probabilidad:
• Eventos más probables, menos probables e igualmente probables.
• Definición clásica (o laplaciana).</td><td>1. Diferenciar entre eventos más probables, menos probables e igualmente probables, de acuerdo con los puntos muestrales a favor de cada evento.
2. Determinar la probabilidad de un evento como la razón entre el número de resultados favorables entre el número total de resultados.
3. Valorar la importancia de la historia en el desarrollo de la teoría de probabilidad.</td></tr>
<tr><td>Reglas básicas de probabilidad:
• La probabilidad de cualquier evento es un valor numérico entre 0 y 1.
• La probabilidad de un evento seguro es 1 y de un evento imposible es 0.</td><td>4. Deducir las propiedades de las probabilidades que están vinculadas con valores que puede tomar la probabilidad para evento seguro, probable e imposible.
5. Plantear y resolver problemas vinculados con el cálculo de probabilidades.
6. Utilizar probabilidades para favorecer la toma de decisiones en problemas vinculados con fenómenos aleatorios.</td></tr>
</table>

Nota. EGB: = Educación General Básica. *Fuente*: MEP (2012).

De acuerdo con la información expuesta en la tabla 1, el MEP (2012) pretende que los estudiantes utilicen la definición clásica de probabilidad para el cálculo de eventos, como la fracción de casos favorables entre el total de casos. Además, se busca que el estudiante deduzca algunas propiedades básicas sobre las probabilidades. Asimismo, en la resolución de problemas, se busca que los estudiantes lleven a cabo procedimientos para tomar decisiones en problemas vinculados con situaciones aleatorias.

Finalmente, el MEP (2012) menciona que antes de iniciar con algunas habilidades específicas en décimo año (IV Ciclo), tales como evento seguro, evento imposible, eventos mutuamente excluyentes, probabilidad de la unión y probabilidad del complemento; es conveniente retomar el concepto de probabilidad de un evento mediante la definición clásica. En este ciclo se busca realizar un análisis sobre las propiedades básicas de probabilidad a partir de los aportes del enfoque clásico y frecuencial, por consiguiente, se busca estudiar los axiomas de Kolmogorov para formalizar el concepto de probabilidad (MEP, 2012).

En relación con el rol del profesor de matemáticas en el abordaje de la definición clásica de probabilidad, el MEP (2012) sugiere algunas recomendaciones metodológicas. En los primeros acercamientos a esta definición, se pretende que el docente favorezca en los estudiantes la capacidad para deducir algunas propiedades elementales, mediante la resolución de problemas que impliquen la selección de bolas de diferentes colores en una urna, o bien, problemas contextualizados (MEP, 2012).

Además, el docente debe hacer énfasis en las formas de representar los puntos muestrales, ya sea mediante llaves ({}) o mediante diagramas, y debe hacer énfasis en que este tipo de representación varía de acuerdo con el número de resultados del experimento (MEP, 2012). Asimismo, se recomienda el planteamiento de problemas que permitan valorar las percepciones o creencias que puedan tener los estudiantes con respecto a situaciones probabilísticas (MEP, 2012). Por lo tanto, antes de que el profesor planteé la definición clásica de probabilidad se deben proponer situaciones aleatorias que ayuden a precisar el concepto. Finalmente, se sugiere que antes de formular la definición frecuencial de probabilidad, el profesor de matemáticas proponga situaciones aleatorias en las que el espacio muestral sea indeterminado o infinito, esto con el fin de inculcar en los estudiantes las limitantes de la definición clásica de probabilidad (MEP, 2012).

En síntesis, con las ideas expuestas anteriormente es evidente la importancia de la definición clásica de probabilidad para el desarrollo de la noción de azar, el cálculo de probabilidades, introducir el enfoque frecuencial y, para comprender y aplicar algunos axiomas de probabilidad. Por consiguiente, el docente de matemáticas debe poseer conocimiento sobre el cálculo de probabilidades desde el enfoque clásico, las representaciones asociadas a los puntos muestrales de un evento, las limitaciones de la noción clásica, las aplicaciones del enfoque, las propiedades que se pueden deducir, entre otras.

1.1.3 La noción clásica de probabilidad en la formación inicial de los profesores de matemáticas de la carrera de Enseñanza de las matemáticas de la Universidad Nacional de Costa Rica.

Para desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad de forma efectiva, es necesario que exista una preparación adecuada de los docentes. Estos deben poseer los conocimientos necesarios para atender la enseñanza de la probabilidad desde cualquiera de los enfoques (clásico, frecuencial o bayesiano) (Batanero y Díaz, 2011; Brase et al., 2014; Huerta, 2018).

Ahora bien, haciendo énfasis en el papel de la noción clásica de probabilidad en la formación inicial del docente, es necesario que este conozca y comprenda dicha noción y sus aplicaciones, además de los diferentes enfoques de probabilidad, las controversias y limitaciones del enfoque clásico (Batanero et al., 2004; Estrada et al., 2018).

Por su parte, el plan de estudios de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de las matemáticas (BLEM-2017) de la UNA busca, a partir de los principios de la probabilidad y estadística fomentar “el conocimiento del profesor en formación, desde la perspectiva de la estadística descriptiva e inferencial para la resolución de problemas en diferentes contextos” (UNA, 2017, p.54). El Plan de estudios de la carrera BLEM-2017 cuenta con tres cursos que abarcan esta área del conocimiento, MAC413 Estadística y Probabilidad, MAC416 Inferencia Estadística y MAC417 Didáctica de la Estadística y la Probabilidad. Solamente, los cursos MAC413 Estadística y Probabilidad, y MAC417 Didáctica de la Estadística y la Probabilidad incluyen dentro de sus descriptores la noción clásica de probabilidad.

Según la UNA (2017), las competencias que se pretenden desarrollar en el docente en formación, particularmente en el curso MAC413 Estadística y Probabilidad en torno a la noción clásica de probabilidad son:

a) Definir los conceptos básicos de la teoría de la probabilidad.
b) Conocer el concepto de probabilidad según el enfoque clásico y frecuencial.
c) Conocer los axiomas y teoremas relacionados con la probabilidad clásica.
d) Seleccionar el teorema o axioma apropiado para calcular la probabilidad de un evento.

Por su parte, el curso MAC417 Didáctica de la Estadística y la Probabilidad busca que el profesor en formación:

a) Comprenda los conceptos fundamentales de la Probabilidad a través de su evolución sociohistórica como los fundamentos epistemológicos y filosóficos.
b) Identifique la Probabilidad como una herramienta para modelar diferentes fenómenos.
c) Analice el papel de las representaciones probabilísticas en la modelización de diferentes fenómenos.

En síntesis, los cursos MAC413 y MAC417 tienen como objetivo que el profesor de matemáticas en formación comprenda el contenido de probabilidad desde una perspectiva clásica y lo utilice en el cálculo de eventos. Asimismo, se busca que los futuros docentes empleen las propiedades relacionadas con el cálculo de la probabilidad de eventos. Estos cursos también pretenden que los docentes en formación adquieran una comprensión de los debates históricos en torno al significado del enfoque clásico, así como su relación con los juegos de azar. En consecuencia, durante el desarrollo de estas competencias, se abordan definiciones, propiedades, aplicaciones, aspectos fenomenológicos, representaciones y algoritmos o procedimientos asociados a la noción clásica de probabilidad. Estos elementos son considerados como parte del conocimiento especializado de un profesor de matemáticas, que se describen en *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), específicamente en la categoría del *Knowledge of topics* (KoT).

1.2. ANTECEDENTES SOBRE INVESTIGACIONES RELACIONADAS CON EL CONOCIMIENTO DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN PROBABILIDAD

En esta sección se describen algunas investigaciones en torno al conocimiento del profesor de matemáticas, tanto en ejercicio como en formación inicial a nivel de educación secundaria en el tema de probabilidad. Se consideran aquellas investigaciones que incluyen de manera implícita o explícita la noción clásica de probabilidad. Se realizó una revisión bibliográfica en bases de datos, buscadores académicos, revistas internacionales y nacionales especializadas en educación matemáticas.

1.2.1. Investigaciones a nivel internacional

En primer lugar, el estudio de Nabbout-Cheiban (2016), analiza las concepciones de un grupo de docentes en formación de Estados Unidos y Francia respecto al concepto de probabilidad en eventos independientes. El instrumento suministrado a los profesores consistía en resolver problemas de probabilidad, también, se les presentaba un problema con respuestas hipotéticas y tenían que describir si las respuestas eran correctas o no. El investigador planteó a un grupo de profesores de matemáticas en formación inicial un problema que consistía en seleccionar una serie de números de lotería, con opciones que iban del 1 al 64. Las series presentadas eran: A: {1, 2, 3, 4, 5, 6} y B: {3, 57, 9, 12, 48}. Varios docentes optaron por la serie B, argumentando que consideraban el evento A como menos probable en comparación con el evento B, lo cual es una percepción incorrecta.

Nabbout-Cheiban (2016) menciona que algunas de las deficiencias mostradas por los docentes, es el sesgo de representatividad, es decir, atribuirle mayor probabilidad a un evento que parece ser el más representativo en una determinada situación.

Uno de los errores en el razonamiento de algunos profesores de matemáticas en formación inicial fue creer que, si se lanza una moneda tres veces seguidas y se obtienen dos escudos y una corona, entonces es más probable obtener un escudo en el cuarto lanzamiento (Nabbout-Cheiban, 2016). Este planteamiento no es correcto, ya que cada lanzamiento de la moneda es un evento independiente con una probabilidad constante del 50% de ser escudo o corona. Esta confusión evidencia una limitación en la comprensión del enfoque clásico de la probabilidad.

Por otra parte, en el estudio de Stephens y Wilkins (2019) hubo una sola participante, estudiante de licenciatura en educación matemáticas. La metodología empleada corresponde a una entrevista clínica semiestructurada en la cual la participante realizó ejercicios tradicionales de probabilidad (barajas de cartas, lanzamiento de monedas justas y bolsa con pelotas de colores) así como preguntas enfocadas en el conocimiento didáctico sobre probabilidad.

Stephens y Wilkins (2019) pretendían indagar si la profesora en formación inicial tiene las mismas concepciones incorrectas en algunos contenidos de probabilidad que los estudiantes de secundaria suelen tener. Concretamente, se pudo evidenciar con el siguiente error de la participante, ella concluyó que, al lanzar una moneda justa, la secuencia ECCECE (E: escudo y C: corona) es más probable que suceda en comparación con la secuencia CCCEEE. De acuerdo con los autores la participante no experimentó dificultad en las tareas de probabilidad condicional ni en los aspectos didácticos del contenido.

Aunque los estudios de Nabbout-Cheiban (2016) y Stephens y Wilkins (2019) no abarquen de forma explícita el enfoque clásico de probabilidad es evidente que dentro del desarrollo de los problemas involucran el cálculo de probabilidades de eventos simples y conceptos relacionados con dicho enfoque como la equiprobabilidad, aleatoriedad y determinismo. Por tanto, da un acercamiento a investigaciones con profesores en formación inicial sobre el conocimiento de algunas nociones básicas de probabilidad.

Por otra parte, los estudios de Bastias et al., (2017) y Cardeñoso et al. (2017) realizados con profesores en ejercicio y en formación inicial respectivamente, revelan debilidades en el razonamiento probabilístico que tienen los participantes y en la importancia que el docente comprenda este conocimiento. Estos investigadores analizaron las respuestas de los profesores mediante un cuestionario con preguntas cerradas en donde evaluaban los conocimientos básicos y formales de probabilidad. Las preguntas utilizadas por Bastias et al. (2017) fueron recopiladas por investigaciones previas, en cambio, los ítems de Cardeñoso et al. (2017) fueron sometidos a una validación por juicio de expertos y antes de la aplicación del instrumento realizaron una prueba piloto.

Uno de los ítems utilizados por Bastias et al. (2017) para valorar el conocimiento fue, hallar la probabilidad de visitar el hospital de Concepción en Chile, seleccionar un bebé y que sea de sexo masculino. En este problema, los sujetos de investigación dieron solución haciendo uso del enfoque clásico de probabilidad, pues, realizaron una analogía con el lanzamiento de una moneda (dos posibles resultados: escudo o corona) y, por ende, concluían que la probabilidad de ser un bebé masculino es del 50%; pues, únicamente hay dos posibilidades (masculino o femenino) pero, no significa que ambos eventos sean equiprobables como el lanzamiento de una moneda. Los autores resaltan que en Chile el nacimiento de niños es mayor que las niñas y por tanto no se puede asumir equiprobabilidad. Además, Batanero y Díaz (2007) mencionan que la equiprobabilidad se puede encontrar en los juegos de azar, pero en eventos cotidianos es poco habitual.

Por su parte, Cardeñoso et al. (2017), propusieron el siguiente problema, "durante una tarde jugamos a lanzar dos dados legales y acordamos que gana quien acierta el resultado de sumar los números obtenidos, la confianza que tengo en ganar eligiendo el 7 para toda una tarde de juego es [¿?]" (p.158). En el cual los participantes atribuyen la dificultad en la definición del espacio muestral y del suceso, donde asumen la equiprobabilidad de resultados expresando que es irrelevante cuál número elegir.

En ambas investigaciones —Bastias et al. (2017) y Cardeñoso et al. (2017)— se buscaba que los participantes utilizaran el cálculo de probabilidades de un evento simple que, con la regla de Laplace bastaba, o bien, que proporcionaran un argumento de equiprobabilidad para justificar la estimación probabilística.

Por otra parte, Rodríguez et al. (2018) realizaron un estudio comparativo entre el conocimiento probabilístico de profesores en ejercicio y en formación en Chile. Los autores efectuaron preguntas cerradas y abiertas para conocer de forma cualitativa y cuantitativa el conocimiento mostrado por los participantes. Además, resaltan que los profesores en ejercicio presentan porcentajes de logro menores que los que se encuentran en formación. Asimismo, estos autores resaltan que, en ambos grupos, los profesores cuentan con mayor formación de carácter procedimental que conceptual.

Por otra parte, en la investigación de León et al. (2019), utilizan como fundamentación teórica el modelo MTSK, en el diseño de un cuestionario de preguntas abiertas para analizar los conocimientos sobre los temas en probabilidad de ocho profesores en ejercicio que cursan una maestría en educación matemáticas. El instrumento está basado en el contexto del sistema educativo colombiano y toman algunas actividades de otras investigaciones relacionadas con el conocimiento del profesorado en probabilidad.

Los resultados del estudio de León et al. (2019) permiten reconocer que los profesores poseen desempeños bajos en los temas de probabilidad. Asimismo, en dicha investigación lograron identificar elementos como objetos matemáticos y conceptos fundamentales que pertenecen al conocimiento de los temas (KoT) del modelo MTSK.

De acuerdo con estos estudios, los profesores en formación inicial y en ejercicio poseen debilidades en los conocimientos en probabilidad, en ocasiones, no dominan las nociones elementales que han de enseñar a sus estudiantes, lo cual concuerda con lo manifestado por Estrada y Batanero (2011). Más aún, Batanero et al. (2016) indican que una de las debilidades en los profesores de matemáticas es que asumen la equiprobabilidad de los resultados de un evento.

1.2.2. Investigaciones a nivel nacional

En este apartado, se destacan dos investigaciones relacionadas con el conocimiento del profesor en probabilidad realizadas en Costa Rica. El primer estudio es sobre el desempeño estocástico de docentes en ejercicio en dos regiones de Latinoamérica, Costa Rica y México (Cuevas y Ramírez, 2018). El segundo estudio fue realizado en el Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR), en donde analizan las respuestas de docentes en formación sobre contenidos de probabilidad (Sanabria, 2019).

El estudio “Desempeño en estocástica entre profesores de educación secundaria: un estudio exploratorio en dos regiones de Costa Rica y México” (Cuevas y Ramírez, 2018), indagan el conocimiento de 111 profesores (33 costarricenses y 78 mexicanos) en ejercicio mediante la aplicación de 16 ítems con contenidos sobre estadística y probabilidad, validados por los lineamientos del Programa Internacional de Evaluación de los Alumnos (PISA).

Los autores concluyen que hay debilidades en estas áreas del conocimiento en donde, 53.13% de los profesores desconocen los principios básicos de probabilidad. Acentúan que los docentes tienen problemas en la interpretación de datos agrupados, la clasificación de variables y la diferenciación entre fenómenos aleatorios y determinísticos. A raíz de lo anterior, Cuevas y Ramírez (2018) sugieren que los docentes deben poseer competencias que se presume fueron adquiridas en su proceso de formación tales como, “conocer el desarrollo histórico de la estadística y la probabilidad; entender los postulados probabilísticos más representativos; comprender y usar el lenguaje propio de estas disciplinas […]” (p.122).

A continuación, con la finalidad de diferenciar los resultados entre ambas naciones se presenta la siguiente tabla:

Tabla 2.

Rendimiento global y por nación de los participantes según temáticas.

Temática	Ítems	% de acierto total	% de acierto por nación	
			Costa Rica	México
Interpretación de tablas y gráficos	1, 4, 5, 7, 9	38.74	40.00	38.21
Experimentos aleatorios y deterministas	2 y 3	82.88	77.27	85.26
Medidas de tendencia central	6, 8 y 11	44.14	42.42	44.87
Probabilidad	10	46.85	54.55	43.59
Clasificación de variables	12, 13 y 14	39.04	57.58	31.20
Diagrama de Golback	15	74.77	66.67	78.21
Independencia de eventos	16	79.28	63.64	85.90

Nota. Tomado de Cuevas y Ramírez (2018, p.107)

Los ítems 10, 15 y 16 abarcan los contenidos de probabilidad condicional, diagramas de árbol e independencia de eventos, y los docentes mostraron deficiencias en la resolución de estas tareas (Cuevas y Ramírez, 2018). Pues, alrededor del 40% de los profesores costarricenses muestran deficiencias en resolver problemas que involucran el cálculo de probabilidades. Además, el desempeño en general de los docentes costarricenses y mexicanos, en los contenidos de estadística, es menor en comparación con los de probabilidad.

Por otra parte, Sanabria (2019) enmarca su investigación con nueve docentes en formación del ITCR, que ya cursaron una asignatura de probabilidad y un curso de didáctica de la estadística. Se administró un cuestionario sobre situaciones-problema de probabilidad con el fin de valorar el manejo que hacen de la aleatoriedad. Este estudio hace hincapié en la formación inicial del docente de matemáticas. Sanabria (2019) indica que la formación que reciben los futuros docentes de secundaria en el ITCR se encuentra centrada en el método axiomático de la probabilidad, por ende, puede convertirse en un obstáculo para comprender la aleatoriedad y, en efecto, los participantes dan respuestas deterministas a situaciones aleatorias.

Otra de las limitantes de los participantes, en la investigación citada, es el empleo incorrecto de la regla de Laplace pues, los sujetos de estudio no verificaban si el evento era aleatorio, o si cumplía la condición de equiprobabilidad (Sanabria, 2019). También, el autor resalta que los profesores en formación inicial, en ocasiones no explicitan el espacio muestral. Finalmente, el investigador menciona que una posible causa de las dificultades en probabilidad se debe a que los participantes conciben a la estocástica como parte de las matemáticas.

Los antecedentes expuestos anteriormente, tanto a nivel nacional como internacional concuerdan con lo indicado por Batanero (2009), cuando menciona que, “la investigación en educación estadística está mostrando que muchos futuros profesores mantienen inconscientemente una variedad de dificultades y errores sobre la estadística que podrían transmitir a sus estudiantes” (p.35). Del mismo modo, Montes (2016) resalta que la estadística y la probabilidad “son contenidos que en muchas ocasiones provocan en los estudiantes para maestro cierta ansiedad o inseguridad, por resultarles especialmente complejos” (p.58).

1.3. EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD

De acuerdo con los apartados anteriores, se evidencia una serie de conocimientos necesarios para el abordaje de la enseñanza de la noción clásica de probabilidad en la educación secundaria, delimitado en el conocimiento del contenido matemático. En este sentido, el profesor de matemáticas en formación inicial requiere de una alfabetización probabilística que, según Gal (2005), consta de:

a) Nociones probabilísticas: este conocimiento consta de aquellos conceptos elementales para comprender e interpretar situaciones probabilísticas.
b) Cálculo de probabilidades: abarca el dominio del enfoque clásico y, por tanto, es necesario que el profesor en formación inicial comprenda y evalúe si en una situación probabilística los eventos son equiprobables.
c) Terminología: este abarca las diferentes formas de comunicar y representar la probabilidad, el cual se divide en dos, la primera, corresponde a la familiaridad con la parte axiomática de la probabilidad y, la segunda, refiere a las diversas formas de representar y comunicar la probabilidad en eventos reales.
d) Cuestionamientos críticos: corresponde a aquellas cuestiones para reflexionar cuando se trata de probabilidades, implica saber qué preguntas críticas hacer cuando una persona se encuentra en una situación aleatoria o determinista.
e) Contexto: comprender el papel y las implicaciones de los problemas y mensajes probabilísticos en diversos contextos.

A partir de lo expuesto por Gal (2005) y lo mencionado en los apartados anteriores se presentan algunos elementos que deberían formar parte del conocimiento del contenido matemático en el tema de la noción clásica de probabilidad en los docentes de matemáticas:

1. Conocer el concepto de probabilidad.
2. Saber el concepto de evento o experimento probabilísticos.
3. Diferenciar y conocer los conceptos de aleatoriedad, determinismo e incertidumbre.
4. Conocer los conceptos de evento seguro, imposible y probable.
5. Identificar los puntos y espacios muestrales de un evento.
6. Identificar en qué contextos es posible utilizar el enfoque clásico de probabilidad y en cuáles no.
7. Calcular la probabilidad de eventos probabilísticos.
8. Saber el concepto de equiprobabilidad.
9. Reconocer puntos muestrales equiprobables.

10. Conocer la definición clásica de probabilidad y su relación con otros enfoques de probabilidad.
11. Conocer las limitaciones de la noción clásica de la probabilidad.
12. Conocer las reglas básicas de probabilidad.
13. Identificar las representaciones de probabilidad (decimal, fraccionaria y porcentual).

Cabe destacar que las competencias del docente no solo radican en los conocimientos en probabilidad, sino que debe existir una complementariedad entre la didáctica y las matemáticas. Sin embargo, para efectos de esta investigación solo es de interés el KoT enmarcado en el MTSK, en profesores de matemáticas en formación inicial sobre la noción clásica de probabilidad.

1.4. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y LA PERTINENCIA DEL TRABAJO

Ante lo expuesto, es necesario que los docentes de matemáticas en formación inicial comprendan la relevancia de la noción clásica de probabilidad, no solo porque es un contenido que se aborda en los Programas de Estudio de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, sino, también, porque es un conocimiento fundamental en la enseñanza de la estadística y probabilidad. Por esta razón, es crucial que los profesores de matemáticas en formación inicial tengan conocimiento del contenido en los distintos enfoques de la probabilidad, entre ellos la noción clásica.

En relación con los antecedentes, las investigaciones resaltan la importancia de realizar estudios sobre el conocimiento del profesor de matemáticas en el área de probabilidad, debido a la incorporación de los contenidos de estadística y probabilidad en los currículos escolares. Asimismo, los estudios acentúan las debilidades en los temas de probabilidad y la importancia de reforzar estas áreas del conocimiento e instan a continuar con estas líneas de investigación. Por tanto, es pertinente cuestionarse sobre:

¿Cuál es el conocimiento del contenido matemático que manifiesta un grupo de profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA), sobre la noción clásica de probabilidad?

Los resultados obtenidos son de interés desde diversas perspectivas. Desde un punto de vista teórico, se pretende brindar un aporte a la línea de investigación del conocimiento del profesor de matemáticas en el marco del MTSK, específicamente, en el subdominio del Conocimiento de los Temas (KoT).

Además, es importante mencionar que en relación con el conocimiento del profesorado —haciendo uso del MTSK —, el bloque de probabilidad es el menos analizado por investigadores en educación matemáticas, en comparación con las áreas de números, álgebra, geometría y medidas, tal y como lo resaltan Escudero-Domínguez et al. (2016).

A nivel institucional, este trabajo pretende generar una reflexión colectiva (Escuela de Matemáticas de la UNA) e individual (profesores en formación inicial) sobre el conocimiento del contenido necesario para enseñar probabilidad desde el enfoque clásico. Además, se pretende que esta investigación promueva en la comunidad científica de la Escuela de Matemáticas de la UNA, el planteamiento de investigaciones en torno al conocimiento del profesor de matemáticas en formación inicial en contenidos de probabilidad para favorecer la retroalimentación en los cursos del plan de estudios del BLEM-2017, de manera que se promueva en los futuros profesores competencias y habilidades que les permitan un desempeño profesional cada vez más adecuado en este tema.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivo general

Caracterizar el conocimiento del contenido matemático de un grupo de profesores de matemáticas en formación inicial de la UNA, cuando resuelven tareas sobre la noción clásica de probabilidad, desde los principios del modelo sobre el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, en el II ciclo del 2021.

Objetivos específicos

1. Determinar el conocimiento sobre las definiciones y propiedades de la noción clásica de probabilidad mostrado por un grupo de profesores de matemáticas en formación inicial en la UNA que caracteriza su conocimiento sobre las definiciones, propiedades y sus fundamentos al resolver tareas de la noción clásica de probabilidad.

2. Determinar el conocimiento sobre las representaciones vinculadas al enfoque clásico de probabilidad manifestado por un grupo de profesores de matemáticas en formación inicial de la UNA, que caracteriza su conocimiento sobre registros de representación al resolver tareas de la noción clásica de probabilidad.
3. Identificar el conocimiento sobre los usos, las aplicaciones y los elementos asociados al origen de la noción clásica de probabilidad de un grupo de profesores de matemáticas en formación inicial de la UNA, que caracteriza su conocimiento sobre la fenomenología y aplicaciones al resolver tareas de la noción clásica de probabilidad.
4. Describir el conocimiento sobre los procedimientos relacionados con la noción clásica de probabilidad de un grupo de profesores de matemáticas en formación inicial en la UNA, para caracterizar el conocimiento sobre los procedimientos al resolver tareas de la noción clásica de probabilidad.

2. CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

En este capítulo se resumen los principales fundamentos teóricos que sustentan esta investigación. Se destaca el modelo teórico-analítico a utilizar, los conceptos claves del estudio y las propuestas teóricas adoptadas en el campo de la teoría de probabilidades. El capítulo se organiza en dos apartados. El primero, titulado *2.1 El Modelo MTSK: El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*, explora el modelo MTSK y cómo este se relaciona con el conocimiento especializado que poseen los profesores de matemáticas. El segundo apartado, denominado *2.2 La noción clásica de probabilidad en relación con el conocimiento del profesor de Matemáticas*, se subdivide en cuatro secciones detalladas. Estas secciones son: 2.2.1 Elementos de conocimiento sobre definiciones, propiedades y fundamentos asociados a la noción clásica de probabilidad, 2.2.2 Elementos de conocimiento sobre los registros de representación en la noción clásica de probabilidad, 2.2.3 Elementos de conocimiento sobre fenomenología y aplicaciones de la noción clásica de probabilidad, y 2.2.4 Elementos de conocimiento sobre los procedimientos en la noción clásica de probabilidad. Cada sección aborda diferentes aspectos del conocimiento que un profesor de matemáticas debe tener en relación con la probabilidad clásica.

2.1 EL MODELO MTSK: EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Desde los años 70, el conocimiento del profesor ha sido un tema de interés, autores como Hunt (1976), Elbaz (1983) y Shulman (1986) empezaron a preocuparse por los conocimientos y las distintas maneras en que los docentes adquieren y transmiten el conocimiento a los estudiantes.

En sus inicios, el conocimiento del profesor parte de una conceptualización del papel del docente en el aula, en donde se propuso una visión del profesor como poseedor de un conocimiento práctico, es decir, aquellas ideas sobre cómo y qué enseñar (Hunt, 1976). Por su parte, Elbaz (1983) hace referencia al conocimiento del profesor como una función autónoma en la toma de decisiones tales como adoptar, adaptar y desarrollar materiales apropiados para el proceso de enseñanza y aprendizaje, así como la importancia de un dominio de los contenidos a enseñar y del currículo. Asimismo, Elbaz (1983) menciona que los docentes deben conocer las concepciones de los estudiantes en torno al cómo aprenden, los enfoques de enseñanza y los resultados del aprendizaje.

Por su parte, los aportes de Shulman (1987) hacen hincapié en el conocimiento del profesor. Este autor organiza el conocimiento del profesor en varias categorías:

- Conocimiento del contenido
- Conocimiento didáctico del contenido
- Conocimiento del currículo
- Conocimiento de los estudiantes
- Conocimiento de los contextos educativos
- Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos

De estas categorías, Shulman (1987) indica que la primera fuente del conocimiento base es el conocimiento de los contenidos. Este conocimiento se apoya en, la teoría o bases conceptuales del contenido a enseñar, los estudios acumulados en la disciplina, el saber académico histórico y filosófico sobre la naturaleza del contenido. Siguiendo a este autor, los docentes tienen una responsabilidad respecto al dominio de los contenidos de la asignatura, por ser la principal fuente de la comprensión de la materia para los estudiantes. Por lo tanto, se da énfasis en la importancia de dominar, en primer lugar, el conocimiento del contenido.

Las ideas de Shulman (1986,1987); motivaron a investigadores en educación matemáticas a desarrollar modelos teóricos para analizar el conocimiento del profesor de matemáticas. Se destaca el modelo de Ball et al. (2008) del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, en sus siglas en inglés) desarrollado en la Universidad de Michigan en Estados Unidos. También, el modelo teórico y analítico denominado Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, en sus siglas en inglés) planteado en la Universidad de Huelva, España, por Carrillo y colaboradores (Carrillo et al., 2018).

El desarrollo del MTSK parte de las múltiples facetas que desempeña el docente de matemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Específicamente, el profesor ejecuta un conjunto de funciones tales como planificar la lección, establecer contactos con colegas, impartir lecciones y tomarse un tiempo para reflexionar; para llevar a cabo lo anterior, el docente necesita de un conocimiento especializado (Carrillo et al., 2017 y 2018). En este sentido, Carrillo et al. (2018) asocian ese conocimiento especializado con, significados, propiedades y definiciones en temas particulares, los medios para desarrollar la comprensión de la materia, las conexiones entre los elementos de contenido, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento curricular y las características asociadas con el aprendizaje de las matemáticas, entre otros.

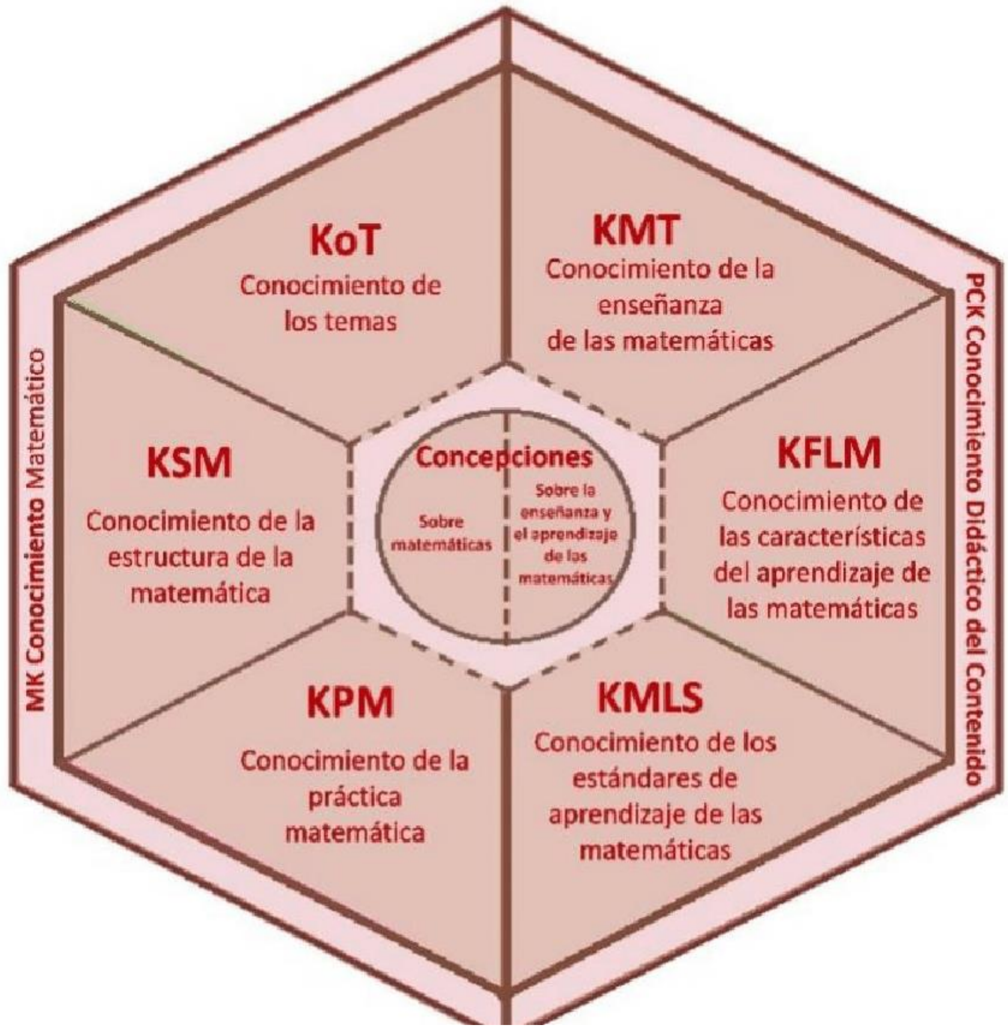
Este modelo divide el conocimiento del profesor en dos dominios, (a) el Conocimiento Matemático (MK) y (b) el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Además, otra característica importante del modelo del MTSK es que incluye el dominio de las creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y de las matemáticas como ciencia (Carrillo et. al, 2018).

A su vez, cada dominio se divide en tres subdominios (véase Figura 2), en el caso del Conocimiento Matemático (MK), incluye: (a1) el conocimiento de los temas (KoT), este abarca los registros en los saberes del contenido matemático, tales como, las propiedades, fundamentos, aspectos fenomenológicos, aplicaciones, representaciones y procedimientos; (a2) el conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM), implica las conexiones con los contenidos de otras asignaturas o niveles educativos, específicamente, aquellas conexiones con temas matemáticos; y (a3) el conocimiento de la práctica matemáticas (KPM), destaca cómo el docente establece relaciones, conjeturas, correspondencias y equivalencias, cómo se argumenta, se razona y generaliza y aquellas características o elementos con los que se hacen matemáticas tales como las demostraciones (Carrillo, et al., 2018).

Por su parte, los subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), son: (b1) el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), abarca las estrategias, técnicas, tareas, recursos y teorías de enseñanza; (b2) el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), corresponde a las formas en que los estudiantes interactúan con el contenido matemático, tales como las dificultades y errores; y (b3) el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), corresponde a las expectativas de los resultados de aprendizaje esperados de acuerdo con el nivel educativo y cognitivo de los estudiantes (Carrillo et al., 2018).

Figura 2.

Modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)



Nota. Tomado de Carrillo et al. (2018, p.6).

Dado que el objetivo general de esta investigación es caracterizar el conocimiento especializado de los futuros profesores de matemáticas sobre la noción clásica de probabilidad, el subdominio que se considera es el conocimiento de los temas (KOT), el cual se ampliara en el siguiente apartado.

2.2 LA NOCIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD EN RELACIÓN CON EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

La noción clásica de probabilidad se encuentra inmersa en los principios y estándares del NCTM (2000) y es parte de las temáticas consideradas por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica en sus programas de estudio de matemáticas vigentes, concretamente en el área de estadística y probabilidad (MEP, 2012). El término *tema* hace referencia a los contenidos matemáticos que son objeto de estudio en los programas curriculares de la enseñanza primaria y secundaria. Por ello, la noción clásica de probabilidad se considera como el *tema* a desarrollar en el subdominio del Conocimiento de los Temas matemáticos (KOT, en sus siglas en inglés) en el modelo MTSK.

El KoT describe la manera en que el docente de matemáticas conoce los temas que enseña; envuelve un conocimiento profundo del contenido matemático, por ejemplo, conceptos, procedimientos, significados del tema, reglas y teoremas (Carrillo et al., 2018). En este sentido, el profesor debe de poseer un conocimiento amplio que abarca ejercicios o problemas en los que se puede emplear el contenido, con sus contextos y significados asociados; propiedades y sus principios, definiciones y procedimientos subyacentes, incluidas las conexiones de elementos dentro del mismo tema; y formas de representar los contenidos (Carrillo et al., 2018). Por lo tanto, el conocimiento que debe tener el docente debe ser una comprensión más profunda, formal y rigurosa en comparación con los estudiantes (Flores-Medrano et al., 2014).

Para Flores-Medrano et al. (2014); Liñán et. al (2016); Vasco et al. (2017) y Carrillo et al. (2018) en el KoT se establecen cuatro categorías para caracterizar el conocimiento del profesor, las cuales se detallan a continuación.

(a) Definiciones, propiedades y sus fundamentos: en primer lugar, se consideran aquellas propiedades que hacen definible a un objeto matemático, además, de las formas alternativas que utilice el profesor para definir un concepto, cabe señalar que no se incluye el hecho de cuáles son las características que ha de tener una definición. Asimismo, en esta categoría, incluye, enunciar y demostrar teoremas o propiedades, en este sentido, no se incluyen las demostraciones formales, sino las realizadas a través de ejemplos, las comprobaciones, modelizaciones, etcétera. Además, se abarcan los axiomas del tema a enseñar, también, se incluyen ejemplos e imágenes asociadas al contenido que describan una propiedad de las matemáticas.

(b) Registros de Representación: incluye el conocimiento sobre las distintas formas en que se representa un tema matemático, tales como la notación y el lenguaje asociado a dichas

representaciones. Por ejemplo, representar un tema matemático de forma numérica, gráfica, verbal, analítica, etcétera.

(c) Fenomenología y aplicaciones: se asocia con el conocimiento que tiene el profesor acerca de modelos y aplicaciones que se relacionan con un tema de matemáticas, es decir, aquellos fenómenos que pueden servir para generar conocimiento matemático, entre ellos, los que aparecen en el origen del propio concepto.

(d) Procedimientos: En esta categoría se consideran, (a) ¿cómo se hace? Esto con relación al conocimiento que tiene el profesor sobre algoritmos convencionales y alternativos para resolver problemas; (b) ¿cuándo se puede hacer?, en este sentido se asocia a cuáles son las condiciones suficientes y necesarias para resolver un determinado problema; (c) ¿por qué se hace así?, es decir, en qué consisten los fundamentos de los algoritmos; y (d) características del resultado, las que tendrá el objeto matemático resultante asociadas a un tema.

Dado que en esta investigación se pretende caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial sobre la noción clásica de probabilidad a partir de las categorías descritas anteriormente, se procederá a realizar la conexión de las categorías del KoT y el enfoque clásico de probabilidad. Este enfoque de probabilidad fue desarrollado por Pierre Simon Marquis De Laplace (1749-1827). Entre los diferentes aportes que realizó este autor a distintas áreas de las matemáticas y en la ciencia en general, se destaca la publicación de dos libros populares en el campo de la teoría de probabilidad, los cuales son: (a) Teoría analítica de la probabilidad y (b) Un ensayo filosófico sobre probabilidades (Laplace, 1795). Este último, se utilizará como fundamentación teórica para esta investigación, la cual ha sido traducida del francés al inglés por Frederick Wilson y Frederick Lincoln en 1951 (Laplace, 1795).

2.2.1. Elementos de conocimiento sobre las definiciones, propiedades y sus fundamentos asociados a la noción clásica de probabilidad

En este apartado se incluye la definición clásica de probabilidad o regla de Laplace definida por Laplace (1795) como la razón entre el número de casos favorables y el de todos los casos posibles, en donde cada resultado es igualmente probable (equiprobabilidad). Dicho de otra forma, por Gmurman (1974), la probabilidad de que suceda un evento E de un total de n casos posibles donde cada uno es igualmente probable viene dado por la siguiente fracción

$$P(E) = \frac{m\ (casos\ favorables)}{n\ (casos\ posibles)}$$

donde cada caso posible tiene la probabilidad de $\frac{1}{n}$, conocida como equiprobabilidad.

Asimismo, se destacan dos conceptos claves que engloban la definición clásica de probabilidad, los cuales se detallan a continuación a partir de los aportes de Gmurman (1974) y Laplace (1795),

(a) Espacio y puntos muestrales: el espacio muestral es un conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio, y cada uno de estos resultados es un punto muestral. Por ejemplo, al lanzar un dado se tiene el siguiente espacio muestral $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los puntos muestrales son $P_1 = \{1\}, P_2 = \{2\}, P_3 = \{3\}, P_4 = \{4\}, P_5 = \{5\}, P_6 = \{6\}$

(b) Evento o suceso: Un evento o un suceso es un conjunto de posibles resultados que se pueden dar en un determinado experimento, es decir, considerar la ocurrencia de algunos puntos muestrales, por tanto, un evento es un subconjunto del espacio muestral.

La propiedad fundamental que subyace al significado clásico de probabilidad es la equiprobabilidad (Beltrán-Pellicer et al., 2018). Por consiguiente, el conocimiento del profesor de matemáticas en esta categoría consiste en conocer que la probabilidad de cada punto muestral es de *1/n* en un espacio muestral finito con *n* elementos.

Además, se incluyen las propiedades y sus fundamentos hacen énfasis en la parte axiomática, es decir, aquellos resultados que son principios fundamentales y evidentes que no requieren demostración. En este sentido, Casella y Berger (2002) mencionan que la probabilidad es una medida que nos responde, qué tan posible es que suceda un evento. Por tanto, se establecen algunas propiedades o axiomas para determinar si un evento es seguro, imposible o probable, las cuales se detallan a continuación a partir de los aportes de Gmurman, (1974) y Laplace (1795).

(a) Evento seguro: la probabilidad de un suceso cierto o seguro es 1. Pues, si el evento es verdadero, cada resultado del experimento es favorable a todos los posibles resultados del evento, en este sentido, $m = n$, por lo tanto,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

(b) Evento imposible: La probabilidad de un suceso imposible es igual a 0. Si el suceso es imposible, ninguno de los resultados elementales del experimento es favorable al suceso. En este caso, $m = 0$, por lo tanto,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$$

(c) Evento probable: la probabilidad de un suceso aleatorio es un número positivo, comprendido entre cero y uno. Puesto que, solo una parte del número total de resultados del experimento es favorable al suceso aleatorio. En este sentido, $0 < m < n$, donde se sigue que, $0 < \frac{m}{n} < 1$, y, por lo tanto,

$$0 < P(A) < 1$$

Así, la probabilidad de cualquier suceso satisface la siguiente desigualdad,

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Por lo tanto, entre menor sea la probabilidad, más difícil es que ocurra un evento y, entre más cercano este la probabilidad de 1 entonces es más probable que ocurra. Además, el profesor de matemáticas puede movilizar el conocimiento de esta categoría llevando a cabo alguna comprobación, simulación, demostración o ejemplos que le permita ejemplificar dichas propiedades (Liñán et al., 2016).

2.2.2 Elementos de conocimiento sobre los registros de representación asociados a la noción clásica de probabilidad

Dado que la probabilidad de un evento corresponde a una fracción entre casos favorables y casos posibles, esta puede ser expresada de forma decimal o porcentual. También, la probabilidad puede ser representada de forma verbal, esto en relación con el apartado anterior (1 si es seguro, 0 si es imposible y si esta entre 0 y 1 es posible o probable).

Además, Beltrán-Pellicer et al. (2018) mencionan las siguientes formas de representación asociadas a la noción clásica: verbal (términos informales del lenguaje cotidiano y propios de la teoría de probabilidad), esquemático o diagrama de árbol, tablas y simbólica.

El diagrama de árbol corresponde a una representación icónica fundamental, porque visualiza la estructura multi-paso del experimento compuesto, es decir, proporciona una interpretación clara de la estructura del experimento y el encadenamiento sucesivo de experimentos (Batanero, 2001). La representación tabular, relaciona los puntos muestrales mediante una correspondencia lo cual permite visualizar todos los casos favorables de un experimento. Finalmente, la representación simbólica corresponde a una enumeración de los puntos muestrales mediante duplas, tripletas o más.

2.2.3. Elementos de conocimiento sobre la fenomenología y las aplicaciones de la noción clásica de probabilidad

Según Skorokhod (2004), la noción clásica de probabilidad surge a raíz de los juegos de azar, ese fue el objetivo en las primeras indagaciones en la teoría de probabilidad. Siguiendo a este autor, las aplicaciones del enfoque clásico se encuentran principalmente, en juegos de azar en donde es posible asumir que los resultados posibles son igualmente probables y, por ello, es extraño encontrarlo en situaciones naturales o físicas. Por ejemplo, cuando se intenta aplicar la probabilidad clásica en tratar de predecir el color de los ojos de un bebé, no es posible aplicar que los resultados posibles tengan la misma probabilidad (Batanero et al., 2012). Por consiguiente, el principal fenómeno que caracteriza la noción clásica de probabilidad es el hecho de que todos los resultados posibles son igualmente probables, a esto se le conoce como equiprobabilidad (Batanero y Díaz, 2007).

De esta forma, el conocimiento sobre *fenomenología y aplicaciones* involucra los modelos atribuibles a la noción clásica de probabilidad que pueden servir para generar conocimiento matemático como los fenómenos asociados al tema (Liñán et al., 2016). Por lo tanto, este conocimiento está asociado con el conjunto de situaciones, aplicaciones y aspectos relacionados al origen del concepto en las que el profesor de matemáticas puede ubicar la probabilidad clásica.

2.2.4. Elementos de conocimiento sobre los procedimientos asociados a la noción clásica de probabilidad

Existen diferentes elementos que caracterizan a cada uno de los enfoques de probabilidad, entre ellos, el tipo de problema asociado, los procedimientos propios del enfoque y las definiciones vinculadas al enfoque (Batanero, 2006). Uno de los algoritmos convencionales del enfoque clásico de probabilidad consiste en desglosar el espacio muestral mediante alguna representación (diagrama de árbol o una tabla) con el fin de obtener todos los resultados posibles; y, posteriormente, emplear alguna técnica básica de combinatoria para contar los casos posibles y favorables y; aplicar la regla de Laplace (Beltrán-Pellicer et al., 2018; Gea et al., 2017; Gómez, 2012).

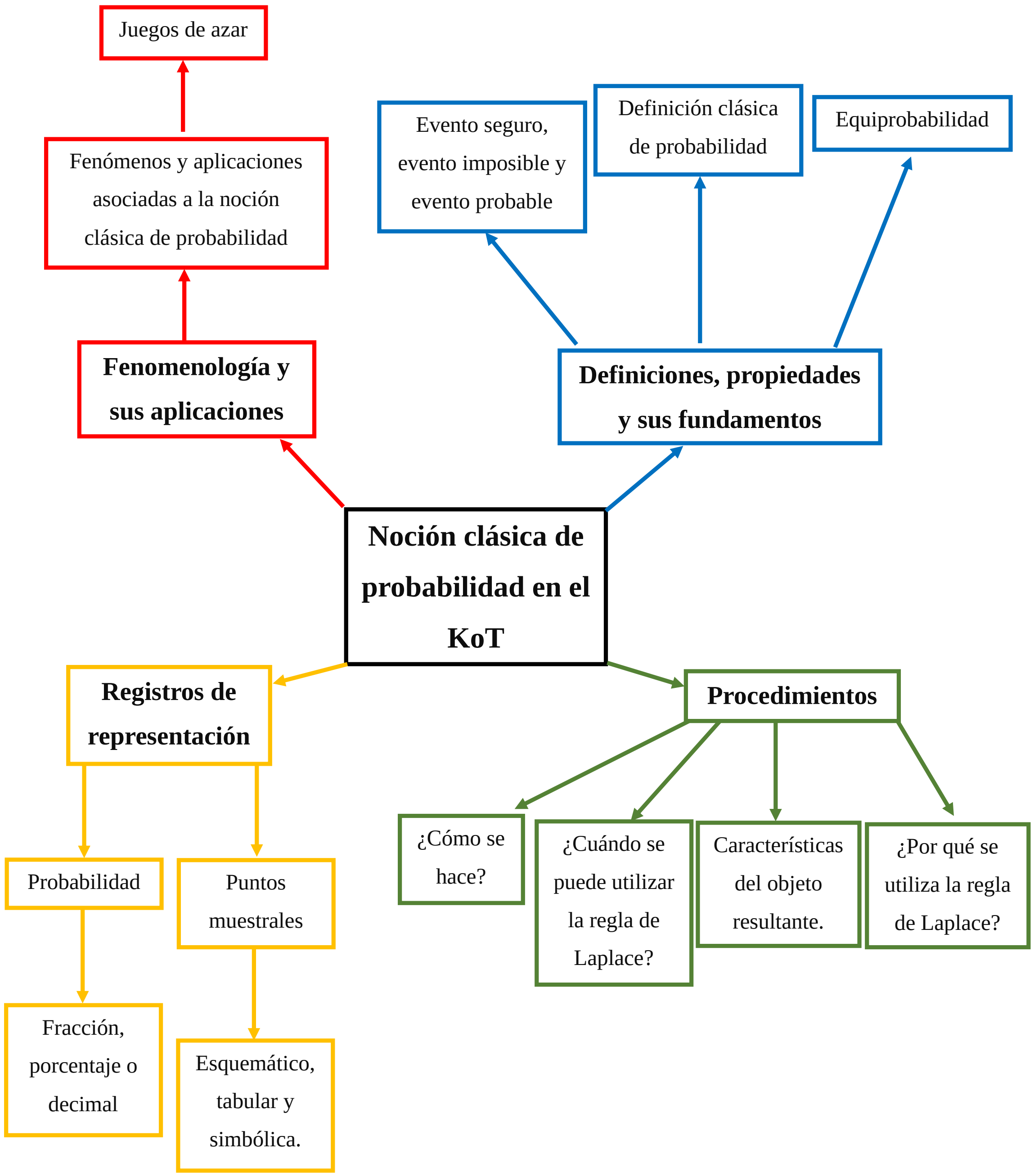
De acuerdo con esta categoría, se deben de considerar: (a) *¿cómo se hace/utiliza?* Esto en relación con el cálculo de probabilidades o bien el cómo se hace un diagrama de árbol o como se utiliza la regla Laplace; (b) *¿cuándo se puede hacer/utilizar?* Corresponde a las condiciones suficientes para calcular la probabilidad de un evento, es decir, cuando se puede aplicar la regla de Laplace y (c) *¿por qué se hace/utiliza así?* Asociado con los fundamentos de los algoritmos, es decir, por qué se utiliza una tabla o un diagrama de árbol, también, el profesor de matemáticas debe de conocer algoritmos convencionales y alternativos en el cálculo de probabilidades (Escudero, 2015).

El sustento teórico presentado sirvió para guiar el desarrollo de este estudio, ya que se cuenta con una herramienta teórica y metodológica para caracterizar el conocimiento del profesor de matemáticas sobre la noción clásica de probabilidad, mediante las categorías del KoT.

En la figura 3, se encuentra un esquema teórico que resume y relaciona los dos componentes teóricos de esta investigación: las categorías del KoT y la noción clásica de probabilidad.

Figura 3.

Esquema teórico de la noción clásica de probabilidad asociada con las categorías del KoT



Nota. Adaptado de Carrillo et al. (2018).

3. CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO

Este capítulo se divide en tres apartados que describen los elementos metodológicos principales de la investigación. En el primero, *Diseño de la investigación*, se presenta la adscripción al paradigma interpretativo con enfoque cualitativo, así como el diseño de la investigación.

En el segundo apartado, titulado *Fases de la Investigación*, se presenta una detallada descripción de las etapas llevadas a cabo en el desarrollo de esta investigación. En la primera fase, se analizan los documentos empleados en la formulación del problema de estudio. La segunda fase se centra en la operacionalización de las categorías de análisis, mientras que la tercera fase aborda el proceso de construcción y validación del instrumento utilizado para la recolección de datos. La cuarta fase se enfoca en la aplicación de dicho instrumento, incluyendo información sobre los participantes involucrados en el estudio. Finalmente, la quinta fase se dedica a la técnica utilizada para el análisis de los datos recopilados.

En el tercer apartado, titulado *Criterios de validez de los resultados*, se proporciona una explicación detallada de los criterios empleados para evaluar la validez de los resultados obtenidos en el estudio.

3.1. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación se enmarca en el paradigma interpretativo; que se caracteriza por describir, comprender e interpretar los significados y las percepciones que las personas tienen sobre su realidad, su actuar y sus experiencias dentro de un contexto o fenómeno social. De acuerdo con Hernández et al. (2014), este paradigma "intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas les otorguen" (p.9). En esta investigación se pretende comprender y profundizar en el conocimiento especializado sobre la noción clásica de probabilidad en profesores de matemáticas en formación inicial en la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de las matemáticas de la Universidad Nacional de Costa Rica. Se parte del supuesto de que el conocimiento es una construcción intersubjetiva, personal y contextualizada, y que se accede de manera parcial (Alfaro, 2020).

El enfoque de esta investigación es cualitativo, siguiendo a Rodríguez (2003) una de sus características se concentra en los "esfuerzos investigativos en la descripción, comprensión e interpretación de los significados que los sujetos le dan a sus propias acciones" (p.33). De este modo, en este trabajo se caracteriza el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial a partir de la interpretación llevada a cabo por el investigador.

El diseño de esta investigación es fenomenológico hermenéutico. Dado que el proceso llevado a cabo coincide con lo expuesto por Hernández et al. (2014) en cuanto al diseño, el cual alude a una interacción dinámica del investigador con las siguientes actividades: (a) se define un problema de investigación, (b) se reflexiona sobre este, (c) se descubren categorías y temas esenciales del fenómeno, (d) se describe el fenómeno y (e) se interpreta mediante los diferentes significados aportados por los participantes.

Por lo tanto, esta investigación es cualitativa de paradigma interpretativo basado en un diseño fenomenológico hermenéutico. Concretamente interpreta y caracteriza el conocimiento matemático sobre la noción clásica de probabilidad de un grupo de profesores de matemáticas en formación inicial matriculados en la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de las matemáticas de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) durante el segundo semestre del 2021.

3.2. FASES DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado, se describen las cinco fases llevadas a cabo en esta investigación. La *primera fase* consiste en la descripción del planteamiento de la investigación. La *segunda fase* refiere a la operacionalización de las categorías de análisis que surgen de la fase anterior. La *tercera fase* consiste en el proceso llevado a cabo en la construcción y validación del instrumento de recolección de la información. La *cuarta fase*, comprende el estudio empírico para caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) sobre la noción clásica de probabilidad, en ella se indica la cantidad de profesores de matemáticas en formación inicial que completaron el cuestionario y el contexto formativo de los mismos. Finalmente, en la *quinta fase*, se detalla la técnica y el proceso llevado a cabo para el análisis de la información recopilada de la fase anterior. Es oportuno resaltar que, a pesar de que las cinco fases de investigación son distintas, se producen momentos de interacción entre ellas.

3.2.1. Primera fase: Planteamiento de la investigación

La fase inicial se enfocó en abordar el problema de investigación desde una perspectiva teórica y metodológica basada en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, específicamente en la noción clásica de probabilidad. Esta etapa se desarrolló a través de una revisión bibliográfica. Según Hernández et al. (2014), la revisión bibliográfica implica detectar, consultar y sintetizar información procedente de libros, investigaciones, tesis y otras fuentes relevantes para el problema de investigación en cuestión.

Se llevó a cabo una revisión de trabajos relevantes al tema como los de Shulman (1986), Ball et al. (2008) y Carrillo et al. (2018), lo que permitió delimitar el alcance del problema. Además, se llevó a cabo una búsqueda bibliográfica en distintas áreas relacionadas con la noción clásica de probabilidad, abarcando aspectos tales como la probabilidad, las matemáticas escolares, el currículo de educación secundaria en Costa Rica y la formación inicial de profesores de matemáticas en la Universidad Nacional en Costa Rica (UNA).

Posteriormente, se profundizó en la indagación teórica y metodológica, priorizando la categoría del *Knowledge of Topic* (KoT) del modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) de Carrillo et al. (2018) y los aspectos teóricos relacionados con la noción clásica de probabilidad. Para llevar a cabo esta fase, se consultaron estudios teóricos y empíricos sobre el MTSK, investigaciones relacionadas con el conocimiento especializado del profesor en estadística y probabilidad, los Programas de Estudio de Matemáticas del MEP (2012) y el Plan de Estudios de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la UNA (BLEM-2017).

Para acceder a esta información, se utilizaron diversas bases de datos, incluyendo Dialnet, Education Research Complete, ERIC, Funes, Google Scholar, Redalyc, Scielo, Scopus y Springer. También se examinaron tesis de licenciatura y tesis doctorales relacionadas con el conocimiento del profesor.

Con base en la recopilación de información realizada, se establecieron los cimientos esenciales para la formulación del problema de investigación, la definición de los objetivos del estudio y la fundamentación de la postura teórica y metodológica que respalda esta investigación.

3.2.2. Segunda fase: Operacionalización de las categorías de análisis

Para esta segunda fase de la investigación se establecieron las categorías de análisis del KoT. Estas categorías son: (a) *definiciones, propiedades y fundamentos*, (b) *registros de representación*, (c) *fenomenología y aplicaciones*, y (d) *procedimientos*.

Para esta etapa se llevó a cabo una operacionalización específica, esto implicó la creación de indicadores de conocimiento concretos que permitieron hacer observables estas categorías. Según, Alfaro et al. (2020), los indicadores de conocimiento son "entendidos como frases para determinar en las respuestas de los sujetos de investigación, evidencias de conocimiento" (p.96). A través de este proceso, las categorías de análisis adquieren la precisión necesaria y se tornan observables, lo que resultó fundamental para una aplicación efectiva en el contexto de este estudio.

Para desarrollar los indicadores de conocimiento, se comenzó con una inmersión teórica y metodológica en las categorías del KoT y los conceptos fundamentales relacionados con la noción clásica de probabilidad. Este proceso involucró una revisión de la literatura y la construcción de los indicadores de conocimiento en concordancia con las categorías del KoT, basadas en distintos estudios (Advíncula et al., 2021; Carrillo et al., 2018; Flores-Medrano et al., 2014; Liñán et al., 2014; Liñán et al., 2016; Vasco et al., 2017).

Posteriormente, se procedió a validar los indicadores de conocimiento mediante la realización de un juicio de expertos y la ejecución de un pilotaje. Este proceso de validación permitió obtener una versión definitiva de los indicadores de conocimiento. A continuación, en la tabla 3, se describen los indicadores de conocimiento definitivos que se emplearon en esta investigación asociados con la definición y las unidades de análisis.

Tabla 3.

Categorías del KoT, definición de las unidades de análisis e indicadores de conocimiento asociados a la noción clásica de probabilidad en el KoT

Categoría	Definición y unidades de análisis	Indicadores de conocimiento
Definiciones, propiedades y fundamentos	Conocimiento sobre el conjunto de propiedades que hacen definible al enfoque clásico de probabilidad tales como: la equiprobabilidad y la fracción entre casos favorables y casos posibles, asimismo, como las distintas formas para definir la noción clásica de probabilidad. Conocimiento sobre las propiedades específicas de la noción clásica de probabilidad y los fundamentos que estos tienen. Se considera la propiedad de equiprobabilidad en espacios muestrales. Asimismo, las propiedades de: evento seguro, evento imposible y evento probable, así como los valores que estos pueden tomar.	Conocimiento sobre el cociente del número de resultados favorables y el número de todos los resultados posibles al definir el significado clásico de probabilidad. Conocimiento de que los puntos muestrales del espacio muestral tienen que ser equiprobables al definir el significado clásico de probabilidad. Conocimiento para deducir un evento seguro. Conocimiento para deducir un evento imposible. Conocimiento para deducir la propiedad de un evento seguro mediante la definición. clásica de probabilidad. Conocimiento para deducir la propiedad de un evento imposible mediante la definición clásica de probabilidad.
Registros de representación.	Conocimiento acerca de las diversas formas de representar los puntos muestrales de un evento, que incluyen representaciones tabulares, verbales, diagramas de árbol y representaciones simbólicas mediante pares ordenados que describen las posibilidades de un evento. Además, las maneras de representar la probabilidad de un evento, que abarcan representaciones porcentuales, fraccionarias, decimales, algebraicas y verbales, como indicar la probabilidad en términos de "menos probable" o "más probable", entre otros.	Conocimiento sobre la representación fraccionaria de la probabilidad de un evento. Conocimiento sobre la representación decimal de la probabilidad de un evento. Conocimiento sobre la representación porcentual de la probabilidad de un evento. Conocimiento sobre la representación verbal de la probabilidad de un evento. Conocimiento sobre la representación algebraica de la probabilidad de un evento. Conocimiento sobre la representación de todos los puntos muestrales del experimento. Conocimiento de al menos, dos formas distintas para representar todos los puntos muestrales de un experimento. Conocimiento sobre la interpretación de los puntos muestrales del experimento dentro del registro de representación utilizado.
Fenomenología y aplicaciones	Conocimiento acerca de los contextos en los que la noción clásica de probabilidad es aplicable y en aquellos en los que no lo es. Además, se considera la epistemología del propio concepto, destacando que la noción clásica se origina a partir de juegos de azar, como la lotería o lanzamiento de monedas, donde se asume la equiprobabilidad, lo que contrasta con su aplicabilidad en fenómenos naturales y contextos sociales.	Conocimiento sobre situaciones aleatorias en las que se pueden establecer puntos muestrales equiprobables.
Procedimientos	Conocimiento sobre los algoritmos, se destaca (a) ¿Cómo se hace?, relacionado sobre los algoritmos convencionales como la regla de Laplace, (b) ¿por qué se hace así? Relacionado con la fundamentación de los algoritmos, (c) ¿Cuándo se puede hacer así? Vinculado a aquellas condiciones para resolver un problema como la equiprobabilidad del espacio muestral y, (d) las características del resultado dentro del tema matemático, es decir, el significado del número obtenido a partir del cálculo de la probabilidad en el contexto matemático.	Conocimiento sobre las condiciones suficientes para aplicar la definición clásica en el cálculo de probabilidades. Conocimiento sobre el procedimiento del cociente de casos favorables entre casos posibles en el cálculo de la probabilidad de un evento. Conocimiento sobre las características del resultado en el cálculo de la probabilidad de un evento. Conocimiento sobre los procedimientos alternativos en el cálculo de la probabilidad de un evento.

Nota. Basado en Advíncula et al. (2021), Carrillo et al. (2018), Flores-Medrano et al. (2014), Liñán et al. (2014); Liñán et al. (2016), Vasco et al. (2017) y Zakaryan y Ribeiro (2019).

3.2.3. Tercera fase: construcción y validación del instrumento de recolección de la información

En esta investigación se utilizó el cuestionario como instrumento para recolectar la información, el mismo permitió explorar el conocimiento del profesor de matemáticas en formación inicial con respecto a la noción clásica de probabilidad. Según Bryman (2001), el cuestionario es un conjunto de preguntas o enunciados en donde los participantes responden a algo escrito para un propósito específico. Además, este autor menciona que el cuestionario es un instrumento eficaz para recolectar información, y que hay diferentes tipos, dependiendo del tipo de pregunta, por ejemplo, hay cuestionarios cuyos enunciados son sobre conocimiento, los cuales tienen la intensión de probar o describir el conocimiento de los encuestados en un área determinada.

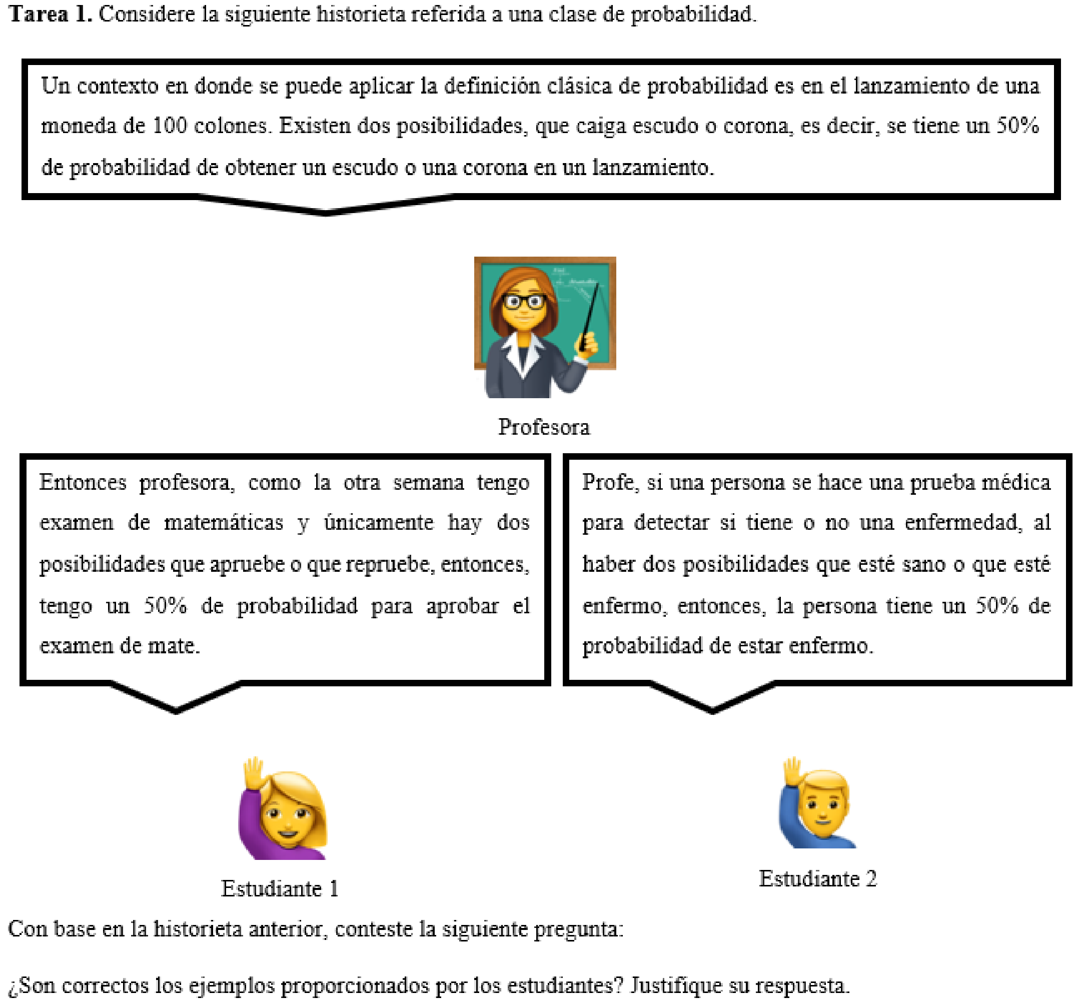
Primero, se inicia con la creación y selección de ítems o tareas relacionadas con la probabilidad clásica, lo que da lugar a la construcción de un banco de preguntas que incluye ítems provenientes de investigaciones previas, ítems propuestos por el MEP (2012) y tareas de elaboración propia. Estas tareas, cuidadosamente elaboradas y seleccionadas, se ajustan a las categorías de análisis del KoT y a los indicadores de conocimiento, garantizando que cada tarea seleccionada se relacione con uno o varios indicadores de conocimiento. De la literatura revisada, se adaptó únicamente una tarea, específicamente la de Núñez (2007), mientras que todas las demás tareas fueron creadas para esta investigación. Luego de la creación y adaptación de las tareas, se procedió a proyectar potenciales respuestas de manera que estas estuvieran en concordancia con los indicadores de conocimiento establecidos.

A continuación, se realiza una descripción de la versión definitiva del cuestionario compuesto por 6 tareas (el instrumento puede ser consultado en anexo 1).

En la tarea 1 (figura 4), se indaga sobre el conocimiento que movilizan los profesores de matemáticas en formación inicial sobre los contextos en los que se puede ubicar la noción clásica de probabilidad y en cuáles no. Por lo tanto, esta tarea está asociada a la categoría del conocimiento denominada *fenomenología y aplicaciones* de la noción clásica de probabilidad. Como se ha mencionado, este enfoque es aplicable a fenómenos asociados a juegos de azar como lanzamiento de dados o monedas, bolas en una urna, juegos con cartas, es decir, en espacios muestrales finitos formados por sucesos en el que es posible anticipar la probabilidad de cada uno.

Figura 4.

Tarea 1 del cuestionario



Tarea 1. Considere la siguiente historieta referida a una clase de probabilidad.

Un contexto en donde se puede aplicar la definición clásica de probabilidad es en el lanzamiento de una moneda de 100 colones. Existen dos posibilidades, que caiga escudo o corona, es decir, se tiene un 50% de probabilidad de obtener un escudo o una corona en un lanzamiento.

Profesora

Entonces profesora, como la otra semana tengo examen de matemáticas y únicamente hay dos posibilidades que apruebe o que repruebe, entonces, tengo un 50% de probabilidad para aprobar el examen de mate.

Profe, si una persona se hace una prueba médica para detectar si tiene o no una enfermedad, al haber dos posibilidades que esté sano o que esté enfermo, entonces, la persona tiene un 50% de probabilidad de estar enfermo.

Estudiante 1

Estudiante 2

Con base en la historieta anterior, conteste la siguiente pregunta:

¿Son correctos los ejemplos proporcionados por los estudiantes? Justifique su respuesta.

En la tarea 3 se pregunta sobre los contextos en los que es posible aplicar la definición clásica de probabilidad, esta tarea es complementaria a la anterior, pues permite indagar sobre el conocimiento que tienen los profesores de matemáticas en formación inicial respecto a la categoría denominada *fenomenología y aplicaciones* mediante una pregunta abierta. Esta tarea indaga sobre el rango de aplicaciones que conoce el profesor de matemáticas en formación inicial, en relación con los fenómenos característicos de la noción clásica de probabilidad y aquellos fenómenos que no lo son.

La tarea 2 consiste en responder a una pregunta abierta relacionada con la categoría denominada *definiciones, propiedades y fundamentos*. En este caso, se solicita enunciar una posible definición de la noción clásica de probabilidad. De esta forma, se describen el conjunto de propiedades utilizadas por los profesores de matemáticas en formación inicial al proporcionar una definición clásica de probabilidad.

Para la categoría denominada *registros de representación* se propone la tarea 4 del cuestionario, en donde se describe el experimento de lanzar un dado y una moneda al mismo tiempo y se proponen dos preguntas. En la primera se pretende que el profesor de matemáticas en formación inicial utilice algún registro de representación para representar los puntos muestrales del experimento. En la segunda pregunta se busca caracterizar el conocimiento sobre las distintas formas de representar los puntos muestrales de un experimento. De esta forma, la tarea 4 permite caracterizar los tipos de representación asociadas a los puntos muestrales de un experimento.

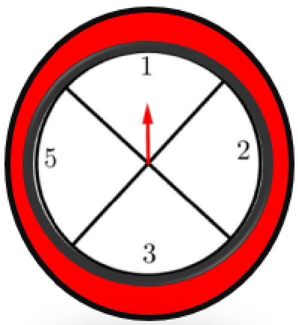
En la figura 5, se presenta la tarea 5 del cuestionario, esta tiene el objetivo de describir el conocimiento que manifiestan los profesores de matemáticas en formación inicial acerca de las condiciones suficientes para aplicar la definición clásica en el cálculo de probabilidad. Dado que la solución hipotética propuesta es incorrecta, debido a que los puntos muestrales no eran equiprobables, es posible caracterizar el tipo de registro de representación empleado para justificar la no equiprobabilidad del espacio muestral o procedimientos alternativos.

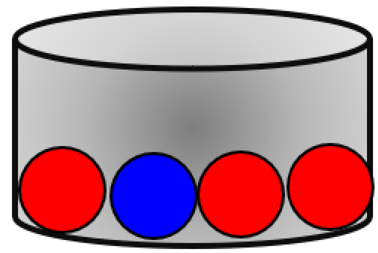
Figura 5.

Tarea 5 del cuestionario

Tarea 5. Se le propone el siguiente ejercicio a un estudiante de octavo año de un colegio de Costa Rica

En un juego se utiliza una ruleta la cual está bien equilibrada y una urna con 4 bolas. En el caso de la ruleta, la flecha queda fija y lo que gira es la ruleta, la ruleta esta divida en 4 sectores circulares y cada sector tiene la misma área. En el caso de la urna, cada una de las 4 bolas tienen el mismo tamaño y la misma forma lo único que cambia es el color. La ruleta y la urna se representan en los dibujos siguientes. Se gira la ruleta y se saca una bola de la urna todo esto al mismo tiempo. El jugador gana si la flecha se detiene en un <u>número par</u> y si <u>saca una bola azul</u>, en caso contrario el jugador pierde. Entonces, ¿cuál es la probabilidad de ganar?





A continuación, se muestra la solución llevada a cabo por un estudiante de octavo año:

Sea A: bola Azul y R: bola roja, los posibles resultados son:

$$\{(1,A);(2,A);(3,A);(5,A);(1,R);(2,R);(3,R);(5,R)\}$$

Entonces, únicamente hay un caso favorable para ganar:

$$\{(2,A)\}$$

Además, hay 8 casos posibles. Por consiguiente, la probabilidad de ganar es

$$\frac{1}{8}$$

De acuerdo con la Tarea 5, ¿es correcto el procedimiento que ha llevado a cabo el estudiante de octavo año? Fundamente su respuesta.

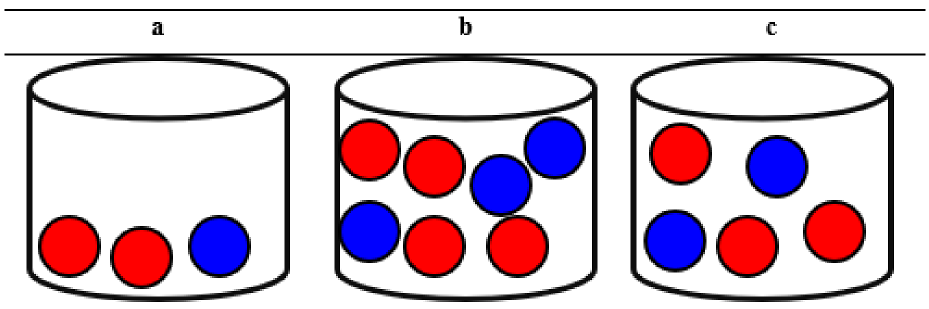
La tarea 6 (ver figura 6) permite caracterizar el conocimiento mostrado por los profesores de matemáticas en formación inicial sobre las propiedades elementales de la probabilidad, como los valores que puede tomar la probabilidad de un evento. Específicamente la pregunta a) de esta tarea 6 permite caracterizar el conocimiento sobre la identificación de un evento más probable que otro, tendiendo en cuenta que $0 \leq P(E) \leq 1$; además, si $P(E)$ está más cercano al 1 entonces la posibilidad de ocurrencia es mayor. Para esto es necesario movilizar la definición clásica de probabilidad al llevar a cabo un procedimiento para el cálculo de probabilidades, asimismo, puede llevar a cabo algún registro de representación. Por lo tanto, esta tarea se asocia con tres categorías del KoT: *propiedades y fundamentos*, *procedimientos* y *registros de representación*.

Una potencial respuesta para la pregunta a) de la tarea 6 es calcular la probabilidad de obtener una bola roja en cada una de las urnas haciendo uso de la definición clásica de probabilidad, $P(urna\ a) = \frac{2}{3} = 0,\overline{6}$, $P(urna\ b) = \frac{4}{7} = 0{,}571\ldots$, $P(urna\ c) = \frac{3}{5} = 0{,}6$. Por lo tanto, es más probable obtener una bola roja en la urna a. Las preguntas b) y c) de la tarea 6 tiene como propósito caracterizar los fundamentos empleados por los profesores de matemáticas para ejemplificar un evento seguro e imposible, haciendo uso del experimento.

Figura 6.

Tarea 6 del cuestionario

Tarea 6. Un juego consiste en extraer una bola de alguna de las urnas a, b o c de forma aleatoria. El jugador gana si obtiene una bola de color rojo.



A partir de lo anterior, conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Con cuál de las tres urnas tiene mayor probabilidad de ganar el jugador? Justifique su respuesta.
b) ¿Cuál es la probabilidad de un evento seguro? Proporcione un ejemplo haciendo uso de la tarea 6, en el que se pueda apreciar un evento seguro, y argumente su respuesta.
c) ¿Cuál es la probabilidad de un evento imposible? Proporcione un ejemplo haciendo uso de la tarea 6, en el que se pueda apreciar un evento imposible, y argumente su respuesta

Nota. Adaptado de Núñez (2007)

El cuestionario realizado fue sometido a un proceso de validación de expertos. De acuerdo con diferentes autores (Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez, 2008; Hernández et al., 2014; y Robles Garrote y Rojas, 2015), la validez de expertos permite validar las unidades de análisis en función con el objetivo del instrumento de recolección de información, mediante la opinión informada de personas con trayectoria y conocimiento en el tema; estos expertos están cualificados para brindar información y valoraciones que permiten realizar ajustes en el instrumento de recolección de información, si es necesario, con el propósito de mejorar su calidad y precisión.

Para la elección de los expertos se consideraron los criterios aludidos por Rojas et al. (2012) y Skjong y Wentworht (2000):

1. Docentes en ejercicio, con cinco o más años de experiencia impartiendo clases de matemáticas o en estadística y probabilidad.
2. Haber enseñado el contenido de probabilidad clásica, más de una vez, en los últimos años de desempeño docente.
3. Haber participado en procesos de actualización en el área de estadística y probabilidad tales como: cursos de formación, realización de posgrados (licenciatura, máster, doctorado), dirección de tesis o charlas relacionadas al área, implicación en procesos de investigación e innovación educativa.
4. Poseer trayectoria en el ámbito de las matemáticas educativa o estadística y probabilidad, respaldada por experiencia en investigación, publicaciones, enseñanza universitaria, y supervisión de tesis, entre otros logros relevantes.
5. Tener conocimiento en el área de probabilidad, particularmente, de probabilidad clásica, o experiencia de investigación en el tema.
6. Disponibilidad para participar.

En total, se contactaron vía correo electrónico a 17 expertos, estos contaban con 22 días naturales para completar el proceso de validación. Sin embargo, solamente se recibió la respuesta de 6 personas expertas. En la tabla 4, se describen algunas características de los 6 expertos que participaron en el proceso de validación, dicha tabla incluye: el código asignado a cada experto, la universidad a la que pertenece, el área de especialización y la experticia (experiencia en investigaciones, docencia universitaria, entre otros).

Tabla 4.
Tabla descriptiva de las personas expertas

Código	Universidad	Área de especialización	Experticia
E1	Universidad de Huelva, España.	Didáctica de las matemáticas.	Conocimiento del profesor de matemáticas.
E2	Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica.	Matemáticas Educativas.	Conocimiento del profesor en estadística.
E3	Universidad Nacional, Costa Rica.	Didáctica de las matemáticas.	Docente universitario, imparte cursos de estadística y probabilidad.
E4	Universidad del Bío Bío, Chile.	Estadística aplicada.	Docente en programas de grado y postgrado.
E5	Universidad de los Lagos, Chile.	Didáctica de la estadística.	Investigaciones en educación estadística.
E6	Universidad Nacional, Costa Rica.	Didáctica de las matemáticas	Investigaciones en el conocimiento del profesor y análisis del contenido en matemáticas.

En la solicitud de validación enviada por correo se incluyeron tres documentos: (1) un resumen sobre el proyecto de investigación en el que se incluía; la descripción de los participantes, la fundamentación teórica utilizada, los objetivos de la investigación y una tabla con las categorías de análisis del *Knowledge of Topics* (KoT) procedentes del *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK); (2) la propuesta de cuestionario (en formato PDF y Word) y (3) un instrumento de validación compuesto por dos partes, la primera parte consiste en observaciones generales del instrumento y, la segunda parte, corresponde a observaciones específicas basado en el instrumento de validez de contenido de Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008) (ver anexo 2).

En el instrumento de validación se incluyeron cada una de las tareas con una tabla compuesta por cuatro categorías con uno o más indicadores por categoría y una escala con un grado de acuerdo (muy de acuerdo, de acuerdo, desacuerdo y muy en desacuerdo). Cada una de las categorías descritas por Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008) se adaptaron de acuerdo con los indicadores de conocimiento y con los fines de esta investigación. En la tabla 5, se describen las categorías y algunos ejemplos de indicadores que se utilizaron para validar el instrumento.

Tabla 5.

Categorías, definición e indicadores utilizados para validar el instrumento

Categoría	Definición	Ejemplo de indicador
Suficiencia (Su)	Las tareas asociadas son suficientes para obtener información sobre uno o más indicadores de conocimiento propuestos para las categorías del KoT.	La tarea 1 permite obtener información sobre el conocimiento que tiene los PMFI sobre los contextos en el que es posible hacer uso del enfoque clásico de probabilidad y en cuáles no. La tarea 2 permite obtener información sobre el conocimiento que tiene los PMFI sobre el conjunto de propiedades que hacen definible al enfoque clásico de probabilidad tales como: la equiprobabilidad y la fracción entre casos favorables y casos posibles, asimismo, como las distintas formas para definir la noción clásica.
Claridad (Cl)	Las tareas se comprenden fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.	La tarea 5 se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.
Coherencia (Co)	Las tareas tienen relación lógica con las categorías del KoT y con los indicadores de conocimiento que se pretenden caracterizar.	La tarea 3 tiene relación con los espacios muestrales que cumplen la propiedad de equiprobabilidad.
Relevancia (Re)	La tarea es esencial o importante, es decir debe ser incluida en el instrumento.	La tarea 4 es esencial o importante, es decir debe ser incluida.

PMFI: = Profesores de matemáticas en formación inicial

Nota. Adaptado de Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008).

La intención era establecer un consenso entre los expertos para cada una de las categorías (suficiencia, claridad, coherencia y relevancia). Asimismo, establecer un consenso de opiniones de los expertos sobre cómo cada tarea particular se ajusta bien para alguna de las categorías del KoT. Además, los expertos contaban con preguntas abiertas en donde tenían que proponer una potencial respuesta u otorgar una observación específica a la tarea. En la figura 7, se ejemplifica la estructura y el contenido del cuestionario a expertos.

Figura 7.

Ejemplo de contenido y estructura del cuestionario a expertos

Tarea 2.

¿Qué es para usted la noción clásica de probabilidad? Para dar respuesta a esta pregunta enuncie una posible definición sobre la noción clásica de probabilidad.

Categoría	**Indicador**	**Grado de acuerdo**			
		Muy de acuerdo	**De acuerdo**	**Desacuerdo**	**Muy en desacuerdo**
Suficiencia	La tarea permite obtener información sobre el conocimiento que tiene los PMFI sobre el conjunto de propiedades que hacen definible al enfoque clásico de probabilidad tales como: la equiprobabilidad y la fracción entre casos favorables y casos posibles, asimismo, como las distintas formas para definir la noción clásica.				
Claridad	La tarea se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.				
Coherencia	La tarea tiene relación con la definición clásica de probabilidad.				
Relevancia	La tarea es esencial o importante para esta investigación, es decir debe ser incluida.				

Nota. Adaptado de Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008).

Se utilizó el porcentaje del grado de acuerdo para establecer el consenso entre los 6 expertos para cada una de las categorías: suficiencia, claridad, coherencia y relevancia. Según Jakobsson y Westergren (2005), el porcentaje de acuerdo permite analizar el grado de acuerdo entre los expertos. El cálculo es el cociente entre la suma del grado de acuerdo brindado por cada experto, para una categoría específica, y la suma de la puntuación máxima.

Los datos se digitaron en una base de datos de Excel y se calculó el porcentaje del grado de acuerdo para cada una de las 6 tareas.

El cociente tiene un rango entre 0 y 1, si el cociente es 1 indica acuerdo perfecto entre los expertos, si es 0 indica que no existe un acuerdo. Siguiendo a Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008) la interpretación de un coeficiente es relativo al fenómeno medido. Por ello, para esta investigación los porcentajes mayores o iguales a 80 se consideraron como un acuerdo apropiado entre los expertos en torno a las categorías propuestas. Finalmente, para las categorías con dos o más indicadores se tomó en cuenta el promedio entre los dos, esto con la finalidad de asignar un único valor por categoría.

A continuación, se exponen los resultados obtenidos del instrumento de validación otorgado a los 6 expertos, así como las recomendaciones que estas personas brindaron en cada una de las 6 tareas.

Tarea 1.

Para esta tarea, los E1 y E5 brindaron dos potenciales respuestas, los cuales se detallan a continuación:

> E1: Las respuestas proporcionadas por los estudiantes no son correctas porque, así como en el lanzamiento de la moneda, si está equilibrada y pensando en una situación ideal, no hay elementos que intervengan, en aprobar un examen o los resultados de una enfermedad hay variables que influyen y hacen que los resultados no sean equiprobables.

> E5: En relación con la situación del estudiante 1, ésta podría verse como un experimento binomial. Por ejemplo, el futuro profesor podría cuestionarse acerca de la estructura del examen, es decir, si el examen es de opción múltiple, el número de preguntas, si cada pregunta cuenta con tres o cuatro opciones de respuesta, entre otros, esto implica que la probabilidad de aprobar cambie, y con ello, los resultados no son equiprobables.

Por su parte, el E6 indica que la tarea 1 se encuentra relacionada con las siguientes categorías del KoT: fenomenología y aplicaciones, definiciones, propiedades y fundamentos. A partir de las observaciones brindadas por los expertos E1, E5 y E6 se pone en manifiesto que la tarea 1 brinda información sobre algunas categorías del KoT.

La tabla 6 muestra las puntuaciones brindadas por los expertos para cada categoría y el porcentaje de acuerdo para la tarea 1.

Tabla 6.

Porcentaje de acuerdo por categorías de los seis expertos para la tarea 1.

Expertos	Categorías			
	Su	Cl	Co	Re
E1	3	4	3	4
E2	2	4	3	2
E3	4	4	4	4
E4	4	4	4	4
E5	4	4	4	4
E6	4	3	4	4
Porcentaje	87,50	95,83	91,67	91,67

Como se puede apreciar, cada categoría tiene un porcentaje alto de acuerdo. En la categoría de claridad (Cl) los expertos concuerdan en un 95,83% que la tarea se comprende fácilmente. Para la categoría de suficiencia (Su) se tiene un 87,50% e indica que la tarea permite obtener información sobre los contextos en el que es posible hacer uso del enfoque clásico de probabilidad y en cuáles no, en consecuencia, se reafirma con las potenciales respuestas brindadas por E1 y E5. Asimismo, lo anterior se reafirma con el porcentaje de acuerdo para la categoría de coherencia (Co) (91,67%), pues se indica que la tarea tiene relación sobre los contextos vinculados a la definición clásica de probabilidad. Finalmente, los expertos concuerdan en un 91,67% la relevancia (Re) de la tarea para esta investigación.

Tarea 2.

Para esta tarea, únicamente se proporcionó una potencial respuesta del E1:

E1: La noción clásica es la que considera casos favorables entre posibles, una vez considerado todos los casos posibles y estos son equiprobables.

Además, *E1* indica que es posible que no se citen propiedades asociadas a la definición clásica de probabilidad, sin embargo, esta información se complementa con las otras tareas. El *E6*, resalta que la tarea podría ofrecer datos sobre los registros de representación, porque al definir un concepto es usual indicar como se representa.

La tabla 7 muestra las puntuaciones brindadas por los expertos para cada categoría y el porcentaje de acuerdo para la tarea 2.

Tabla 7.

Porcentaje de acuerdo por categorías de los seis expertos para la tarea 2.

Expertos	Categorías			
	Su	Cl	Co	Re
E1	3	4	4	4
E2	4	3	4	4
E3	3	4	4	4
E4	4	4	4	4
E5	4	4	4	3
E6	4	4	4	4
Porcentaje	91,67	95,83	100	95,83

Para esta tarea cada categoría tiene un porcentaje alto de acuerdo entre los expertos. Para la categoría de Su (97,67%) se concluye que la tarea permite obtener información sobre el conjunto de propiedades que hacen definible al enfoque clásico de probabilidad, pero deben ser complementadas con las otras tareas con la finalidad de verificar que los PMFI evidencia conocimiento. Para las demás categorías se comprueba que: (1) se comprende la sintáctica y semántica de la tarea; (2) la tarea tiene relación con el objeto matemático en estudio; y (3) la tarea debe incluirse en el instrumento.

Tarea 3.

Para esta tarea, únicamente se proporcionó una potencial respuesta del E1:

> *E1*: se puede usar en un sorteo (e.g. en la lotería), no se puede en una situación donde no se dé la equiprobabilidad (e.g. en una familia de 5 miembros –padre, madre, 3 hijos- donde los padres y abuelos son de pelo oscuro, la posibilidad de tener pelo oscuro no será ½).

Esta potencial respuesta permite constatar que la tarea proporciona evidencias de conocimiento sobre situaciones en donde es posible aplicar la definición clásica y en cuáles no. Asimismo, el *E6*, resalta que:

> *E6*: además, de obtener información sobre la categoría propuesta también podría ofrecer datos sobre las propiedades y fundamentos, definiciones y procedimientos. Esto en caso de que los PMFI presente un ejemplo y su resolución

En la tabla 8, se muestra que las categorías de suficiencia, coherencia y relevancia obtuvieron porcentajes de acuerdo de 87,5%, un consenso apropiado entre los expertos. Demostrando que la tarea permite obtener información sobre el conocimiento que tiene los PMFI en aspectos fenomenológicos y aplicaciones sobre la definición clásica de probabilidad (Su=87,5%), así como otras categorías del KoT. A pesar de que la categoría de claridad obtuvo 91,87% de acuerdo, se realizó un cambio en la semántica y sintaxis de la tarea que se tenía previamente (sugerencia del E1). Finalmente, se concluye que la tarea es coherente con el objeto matemático involucrado (Co=87,5%) y es relevante para la investigación (Re=87,5%).

Tabla 8.

Porcentaje de acuerdo por categorías de los seis expertos para la tarea 3.

Expertos	Categorías			
	Su	Cl	Co	Re
E1	3	4	3	4
E2	2	2	2	2
E3	4	4	4	4
E4	4	4	4	4
E5	4	4	4	3
E6	4	4	4	4
Porcentaje	87,5	91,67	87,5	87,5

Tarea 4.

Para esta tarea se consideró la sugerencia del *E6*, indicando que el conocimiento que manifiestan los PMFI sobre los registros de representación debe orientarse en la interpretación y no solo en la construcción. Por esta razón, se realizó un cambio en la pregunta de la tarea 4, al indicar que debe interpretar la representación utilizada.

Finalmente, al visualizar el porcentaje de acuerdo entre los expertos (ver tabla 9) se evidencia que la tarea permite obtener información sobre el conocimiento que tienen los PMFI en las distintas formas en que se pueden representar los puntos muestrales (Su=95,83%). También, la tarea muestra relación con los registros de representación asociados a la definición clásica de probabilidad (Co=97,91%). Igualmente, se concluye que la tarea es relevante para la investigación (Re=95,83%) y la redacción es clara en semántica y sintáctica (Cl=95,83%).

Tabla 9.

Porcentaje de acuerdo por categorías de los seis expertos para la tarea 4.

Expertos	Categorías			
	Su	Cl	Co	Re
E1	4	4	4	4
E2	3	3	3,5	3
E3	4	4	4	4
E4	4	4	4	4
E5	4	4	4	4
E6	4	4	4	4
Porcentaje	95,83	95,83	97,91	95,83

Tarea 5.

Para esta tarea se realizó lo sugerido por el *E1*.

> *E1*: [mostrar] una hipotética resolución del ejercicio por un alumno de modo que resuelve sin considerar que los resultados que está considerando no son equiprobables y pedirles que valoren la respuesta.

Esto concuerda con los aportes brindados por el *E6*, quién sugirió algunos cambios en la semántica y sintáctica, y en la eliminación de un inciso que se encontraba en la tarea. Las observaciones de los *E1* y *E6* fueron tomadas en cuenta para la construcción definitiva de la tarea 5.

Los porcentajes de acuerdo para las categorías suficiencia (91,66%), claridad (91,66%), coherencia (91,66%) y relevancia (95,83%), permiten establecer un consenso entre los expertos. Por consiguiente, se puede concluir que: (a) la tarea permite obtener información sobre el conocimiento que tiene los PMFI sobre las propiedades específicas de la noción clásica de probabilidad y los fundamentos que estos tienen; (b) la tarea se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas; (c) la tarea tiene relación con espacios muestrales que cumplan la propiedad de equiprobabilidad; y (d) la tarea debe ser incluida en la investigación. Ver tabla 10.

Tabla 10.

Porcentaje de acuerdo por categorías de los seis expertos para la tarea 5.

Expertos	Categorías			
	Su	Cl	Co	Re
E1	3	4	3,5	4
E2	3	3	2,5	3
E3	4	4	4	4
E4	4	4	4	4
E5	4	4	4	4
E6	4	3	4	4
Porcentaje	91,67	91,67	91,67	95,83

Tarea 6.

La persona *E1* otorgó el siguiente potencial de respuesta:

E1: Tiene más probabilidad con la urna A (2/3). Evento seguro: Sacar R U A, porque en cualquier urna sacar R y sacar A son complementarios. Evento imposible: sacar Verde.

La potencial respuesta confiere información sobre el conocimiento sobre los procedimientos asociados al cálculo de la probabilidad de un evento desde el enfoque clásico de probabilidad. Además, la persona *E1* alude que la tarea 6 es un ejemplo prototipo, que no necesariamente aporta información sobre "*el conocimiento de las condiciones necesarias para aplicar la definición clásica en el cálculo de probabilidades*". Esta observación se tomó en cuenta para el análisis de los datos.

La tabla 11, permite consumar el grado de acuerdo entre los 6 expertos, con puntuaciones superiores al 90%.

Tabla 11.

Porcentaje de acuerdo por categorías de los seis expertos para la tarea 6.

Expertos	Categorías			
	Su	Cl	Co	Re
E1	3,4	4	4	4
E2	2,8	4	3	3
E3	4	3,3	4	4
E4	4	4	4	4
E5	4	4	4	4
E6	4	3,3	4	4
Porcentaje	92,5	94,16	95,83	94,83

De acuerdo con la tabla anterior, para la categoría de suficiencia se concluye con 92,5% de acuerdo que la tarea permite obtener información sobre el conocimiento sobre: los valores que puede tomar la probabilidad de un evento cualquiera; los algoritmos para el cálculo de la probabilidad de un evento desde el enfoque clásico de probabilidad; las características del resultado en el cálculo de la probabilidad de un evento desde el enfoque clásico de probabilidad; las condiciones necesarias para aplicar la definición clásica en el cálculo de probabilidades; y las propiedades de evento seguro y evento imposible

Además, para esta tarea se muestra sintáctica y semántica adecuada (Cl=94,16%), la tarea manifiesta relación con el contenido de la definición clásica de probabilidad (Co=95,83%) y cada una de las preguntas de la tarea deben ser incluidas en la investigación (Re=94,83).

En esta primera etapa de construcción y validación del instrumento se obtuvo una buena apreciación de los jueces y un alto porcentaje de acuerdo, lo que evidencia la validez del contenido del KoT dentro del instrumento, así como la objetividad de este. Las aportaciones de los expertos fueron valiosas para llegar a una versión final del instrumento.

Después del juicio de expertos, se procedió a la aplicación del instrumento en un pilotaje. Según Hernández et al. (2014) una prueba piloto consiste en:

> "administrar el instrumento a una pequeña muestra de casos para probar su pertinencia y eficacia (incluyendo instrucciones), así como las condiciones de la aplicación y los procedimientos involucrados. A partir de esta prueba se calculan la confiabilidad y la validez iniciales del instrumento" (p. 210).

Además, de acuerdo con McMillan y Schumacher (2005) la selección de los participantes en la prueba piloto corresponde a sujetos con características similares a los que se usarán en la versión final de la investigación.

En consecuencia, la prueba piloto se aplicó a 16 estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática correspondientes al plan de estudios BLEM-2017 de cuarto año del grupo 01 del curso MAC417 Didáctica Estadística y la Probabilidad durante el I ciclo del 2021. Se obtuvo la autorización del docente encargado del curso para aplicar el instrumento a los estudiantes en el horario correspondiente mediante la presencialidad remota en la plataforma Zoom. El cuestionario fue enviado vía correo electrónico institucional a los estudiantes, quienes tuvieron un plazo de dos horas para responderlo. Finalmente, los participantes enviaron el cuestionario completo a la dirección de correo electrónico jesus.cruz.quesada@est.una.ac.cr.

La ejecución de la prueba piloto tuvo un papel fundamental al proporcionar datos empíricos sobre la primera versión del cuestionario y la apreciación práctica de los indicadores de conocimiento, lo que permitió la categorización efectiva de las evidencias de conocimiento presentadas por los participantes en el pilotaje. Estos pasos culminaron en la creación de la primera versión de indicadores respaldados por evidencia empírica.

Por lo tanto, en esta tercera fase, el cuestionario quedó compuesto por seis preguntas. La supresión de las preguntas del banco de ítems se justificó debido a que estas seis tareas proporcionaban de manera eficaz la información necesaria para cumplir con los objetivos de la investigación, en particular, contribuyendo a los indicadores de conocimiento establecidos. Además, esta decisión se respalda, en parte, en la capacidad de las seis preguntas para proporcionar la información requerida durante la fase de pilotaje. Además, se tomó en consideración la recomendación de un experto (E1) quien indicó que aumentar el número de preguntas requeriría dividir la encuesta en dos momentos diferenciados, mientras que el conjunto de seis preguntas se consideró adecuado en términos de duración y evitó que el instrumento resultara cansado para los participantes, lo cual se ajustaba al tiempo disponible para la aplicación del cuestionario.

En consecuencia, el juicio de expertos y el pilotaje posibilitó la evaluación de la utilidad del instrumento y de los indicadores en la consecución de los objetivos de la investigación, al mismo tiempo que permitió identificar sus limitaciones y realizar las mejoras necesarias antes de la aplicación definitiva, lo cual generó la última versión del instrumento. Los datos del pilotaje se pueden consultar en Cruz et al. (2021).

3.2.4. Cuarta fase: aplicación del instrumento y participantes

En esta investigación, se contó con la participación de 13 estudiantes inscritos en la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de las matemáticas correspondientes al plan de estudios BLEM-2017, a quienes se les administró el instrumento que previamente se había construido y validado en las fases anteriores del estudio. Para esta investigación, los participantes son denominados Profesores de Matemáticas en Formación Inicial (PMFI). Los PMFI se encontraban cursando el primer año del grado de Licenciatura del plan de estudios BLEM-2017.

Los criterios de inclusión fueron: (a) Titulación. Contar con el grado de Bachillerato de la carrera Enseñanza de las matemáticas en el plan de estudios BLEM-2017. (b) Aceptación. Firmar el consentimiento para participar en el estudio, en el cual se garantiza el anonimato de la persona participante (ver anexo 1). El motivo por el cual se toma el primer criterio de inclusión es para asegurar que los participantes han aprobado las asignaturas de: MAC413 Estadística y la Probabilidad, MAC416 Inferencia Estadística y MAC417 Didáctica de la Estadística y la Probabilidad. Los cursos mencionados están relacionados con los conocimientos en probabilidad y, por lo tanto, se asegura que los participantes han completado su formación en el área de probabilidad de acuerdo con lo que dicta el plan de estudios BLEM-2017.

El cuestionario se aplicó a los 13 PMFI durante el segundo ciclo del 2021, mientras las clases se llevaban a cabo en modalidad remota por medio de la plataforma Zoom. En un inicio, se coordinó con el docente a cargo del curso MAC501 Seminario de Investigación Educativa I para administrar el cuestionario durante las horas de clase. Luego, se les envió el cuestionario por correo electrónico institucional a los estudiantes, quienes tuvieron un plazo de dos horas para responderlo. Finalmente, los participantes enviaron el cuestionario completo a la dirección de correo electrónico jesus.cruz.quesada@est.una.ac.cr.

3.2.5. Quinta fase: análisis de la información

A continuación, se describe el proceso que se llevó a cabo para analizar los datos obtenidos al aplicar el instrumento. Según Rodríguez y Valldeoriola (2009):

> El análisis de datos en investigación cualitativa es un proceso que consiste en dar un sentido a la numerosa información recogida en el escenario, lo que requiere que el investigador organice los datos de manera que la información resulte manejable, y eso, a su vez, se consigue buscando aquellas unidades de análisis que nos parecen relevantes (p. 72).

A partir de la información recopilada de los cuestionarios completados por los participantes, se procedió a analizar su contenido. Para llevar a cabo este análisis, se empleó la técnica de análisis de contenido, la cual permitió codificar las respuestas de los participantes y, de esta forma, identificar patrones o tendencias en los datos. De acuerdo con Cohen et al. (2007), el análisis de contenido se define como un conjunto sistemático de procedimientos destinados a examinar y verificar de manera rigurosa el contenido de los datos escritos.

El análisis de la información se desarrolló siguiendo un proceso estructurado basado en las recomendaciones de diversos autores especializados en análisis de contenido (Buendía et al., 1998; Cohen et al., 2007; Krippendorff, 1990; y Rojas, 2014). Estas etapas incluyeron:

(a) *La delimitación del contenido a analizar*. Implicó la identificación de los elementos clave a extraer de los textos analizados. Esta delimitación se logró a través de la consideración de los objetivos de la investigación, la sensibilización teórica y metodológica relacionada con el conocimiento del profesor en el área de probabilidad, y el uso de indicadores de conocimiento.

(b) *La identificación de las unidades de análisis*. Se llevó a cabo mediante un proceso de análisis intuitivo y comprensivo del contenido. Esto permitió identificar y relacionar diversas unidades de análisis como: frases, dibujos, oraciones, tablas, definiciones, procedimientos, explicaciones, esquemas, entre otros; con los indicadores de conocimiento. Se estableció esta vinculación entre las unidades de análisis y las definiciones de cada categoría del KoT que se relacionan con el tema de probabilidad clásica, como se describe en detalle en la tabla 3.

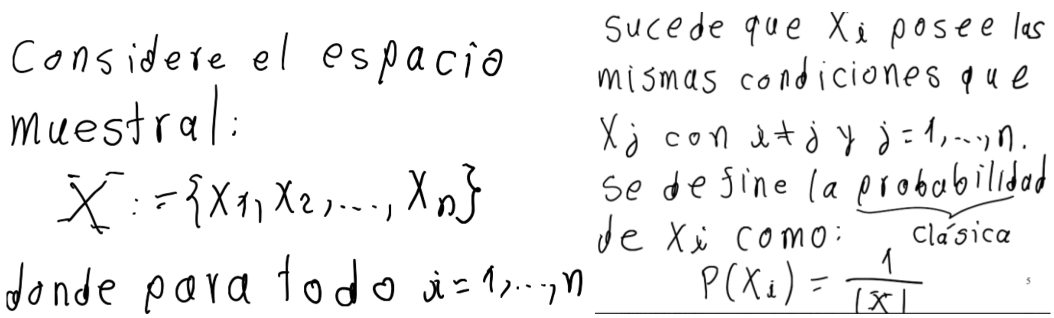
(c) *La codificación y categorización de las respuestas de los participantes*. Durante esta fase, se asignaron códigos o etiquetas a cada unidad de análisis, lo que facilitó la organización y el tratamiento de los datos recopilados.

(d) *La etapa de interpretación.* Consistió en transformar las respuestas proporcionadas por los PMFI en puntuaciones objetivas. Siguiendo la metodología propuesta por Alfaro et al. (2020), se realizó una revisión detallada de las respuestas de cada PMFI, asignando un valor de "1" a las evidencias de conocimiento y un valor de "0" a la ausencia de conocimiento. Según Escudero (2015), la evidencia de conocimiento se refiere a aquella situación en la que se puede observar o interpretar claramente un conocimiento en alguno de los PMFI, y este conocimiento puede ser categorizado dentro de las clasificaciones del KoT. Por otro lado, la ausencia de conocimiento se relaciona con la falta de conocimiento adecuado en alguno de los PMFI, evidenciada cuando la información proporcionada es incorrecta o cuando se sigue un razonamiento erróneo. Esta carencia impide la observación de evidencias de conocimiento en los indicadores.

A continuación, en la figura 8, se ilustra con un caso particular el procedimiento seguido para la codificación de las respuestas de los sujetos que dieron lugar a los resultados. Para ello, se presenta la respuesta del sujeto denominado Profesor de Matemáticas en Formación Inicial número 11 en la tarea 2, codificado como PMFI11-2, para la tarea de definir el significado clásico de probabilidad:

Figura 8.

Respuesta del sujeto PMFI11-2 en la tarea 2


Considere el espacio muestral: $X := \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ donde para todo $i = 1, \ldots, n$ sucede que X_i posee las mismas condiciones que X_j con $i \neq j$ y $j = 1, \ldots, n$. se define la $\underbrace{\text{probabilidad}}_{\text{Clásica}}$ de X_i como: $P(X_i) = \frac{1}{|X|}$

Para llevar a cabo el análisis del contenido de la respuesta del sujeto PMFI11-2, en primer lugar, se transcribe de la siguiente manera:

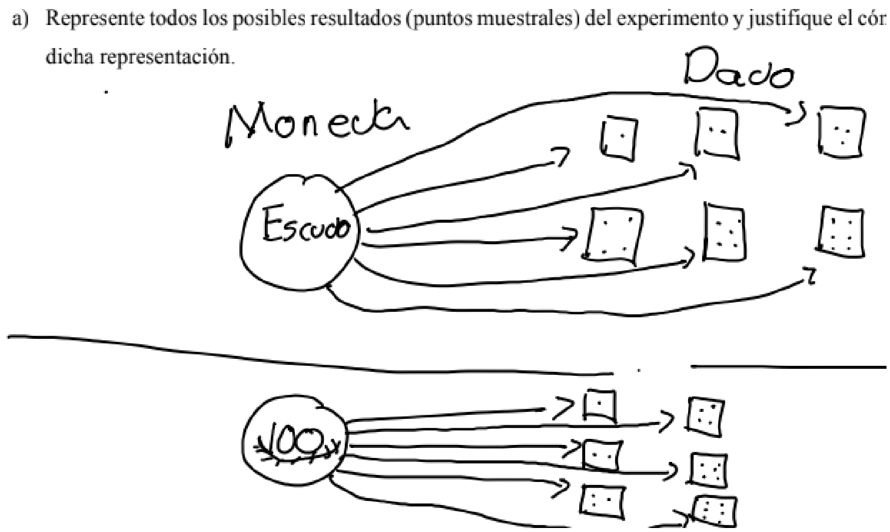
> PMFI11-2. Considere el espacio muestral: $X \coloneqq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ donde para todo $i = 1, \ldots, n$ sucede que x_i posee las mismas condiciones que x_j con $i \neq j$ y $j = 1, \ldots, n$. Se define la probabilidad clásica de x_j como: $P(x_i) = \frac{1}{|X|}$

Con base al análisis de la figura 8 y la transcripción de la respuesta del PMFI11-2, se tiene que el sujeto manifiesta conocimiento de que los puntos muestrales del espacio muestral tienen que ser equiprobables al definir el significado clásico de probabilidad, debido que indica que la probabilidad de cada punto muestral es $P(x_i) = \frac{1}{|X|}$, por lo tanto, se le asigna un 1 al indicador definido para la tarea 2. Además, se le otorgó un 1 al indicador relacionado con el conocimiento sobre la representación fraccionaria o numérica de la probabilidad de un evento, así como una calificación de 1 al conocimiento sobre la representación algebraica de la probabilidad de un evento. Por lo tanto, a partir de la respuesta del participante PMFI11-2, se puede concluir que este moviliza conocimiento en dos categorías del KoT: definiciones, propiedades y fundamentos, así como en los registros de representación.

A modo de ejemplo, se presenta una respuesta de un caso particular en el que un participante realiza una representación del lanzamiento de un dado y una moneda de manera simultánea. En la Figura 9, se muestra la respuesta proporcionada por los PMFI02-3a:

Figura 9.

Respuesta del sujeto PMFI02-3a en la tarea 3 apartado a



Según lo observado en la Figura 9, el participante PMFI02-3a demuestra comprensión de la representación de todos los puntos muestrales en el experimento. En este sentido, se le otorga un valor de 1 debido a que es posible inferir que reconoce los 12 posibles resultados, interpretando que cada flecha está asociada tanto con la moneda como con el dado, representando así un lanzamiento. Sin embargo, se le asigna un valor de 0 al indicador de conocimiento relacionado con la interpretación de los puntos muestrales en el contexto del registro de representación empleado. Esto se debe a que, a pesar de haber realizado la representación, no se evidencia una interpretación explícita de la representación empleada. Es importante aclarar que este valor de 0 no indica necesariamente que los PMFI no tenga conocimiento de la interpretación, sino que en la respuesta proporcionada no se encuentran evidencias que respalden dicha interpretación.

3.3. CRITERIO DE VALIDEZ DE LOS RESULTADOS

Durante el proceso de este estudio, se realizó un trabajo que cumpla con el rigor de la metodología de la investigación. En este sentido, Rodríguez y Valldeoriola (2009) hacen referencia a garantizar la credibilidad y la validez del estudio velando que los resultados sean confiables y creíbles para la comunidad científica, en nuestro caso en educación matemáticas. Además, Bernal (2010) añade que para obtener información confiable y válida se demanda cuidado y dedicación. Por lo tanto, se describen algunos criterios que se utilizaron para garantizar el rigor de este estudio, mencionados por Hernández et al. (2014) y Bryman (2001):

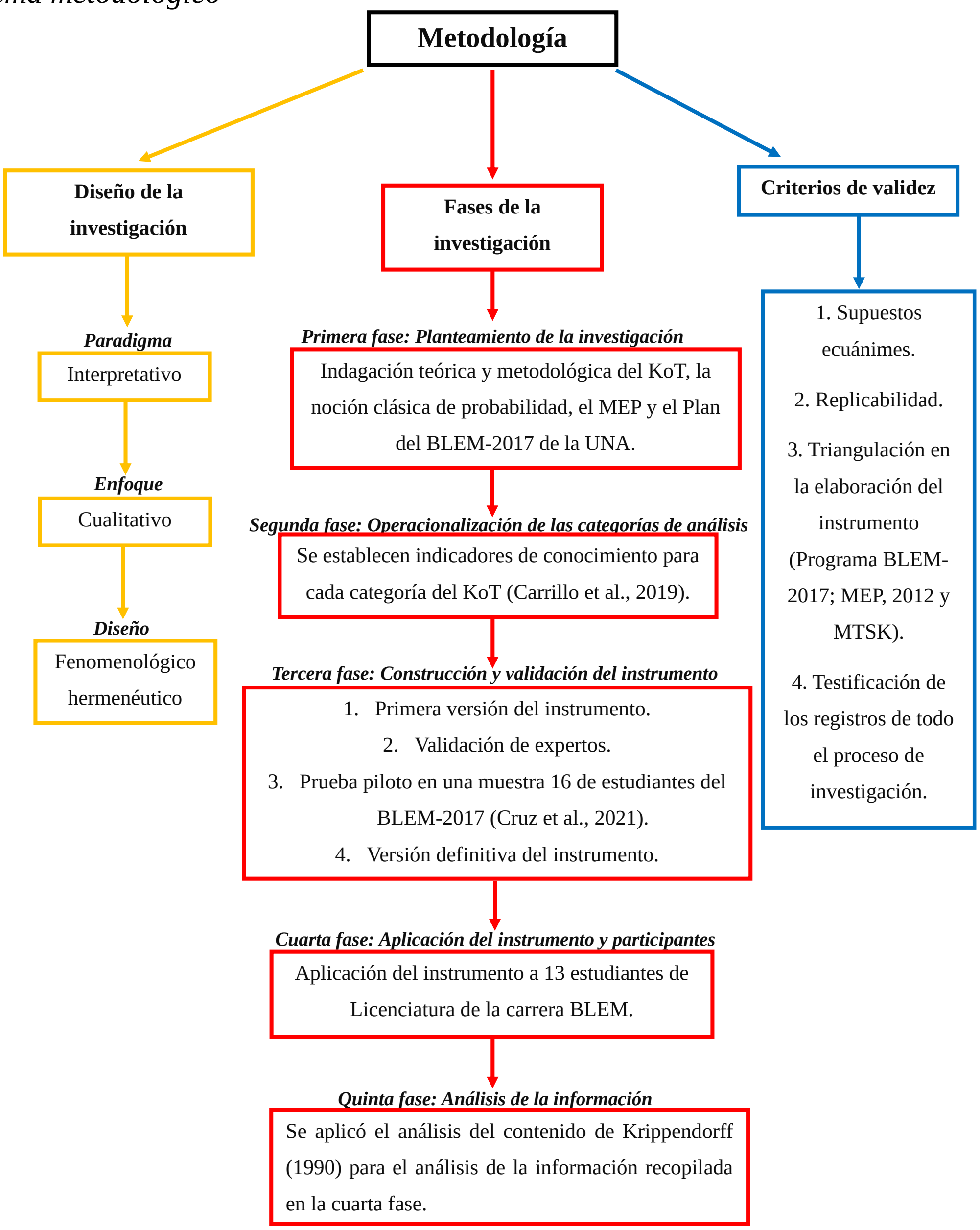
1. Realizar supuestos bajo una valoración ecuánime llevada a cabo por el investigador durante la codificación e interpretación de los datos, evitando así las creencias y opiniones subjetivas de este. Para esto se consultaron a expertos para validar los indicadores de conocimiento, los cuales están establecidos para el análisis de los datos.
2. La replicabilidad es esencial para garantizar la confiabilidad de una investigación. Se logra al aplicar el estudio a diferentes muestras y obtener resultados consistentes. Además, se asegura que los indicadores de conocimiento se asocien con la mayoría de las respuestas. Para esto se llevó a cabo una prueba piloto con participantes similares a los del estudio final. La prueba piloto no solo se empleó para ajustar los indicadores de conocimiento y el instrumento, sino también para evaluar la replicabilidad de los indicadores que originalmente se establecieron a priori, pero que posteriormente se modificaron en función de datos empíricos y aportaciones de expertos, obteniendo resultados similares.
3. En la construcción tanto del instrumento como de los indicadores de conocimiento, se consideró el programa de formación de los PMFI, los programas de estudios de matemáticas del MEP (2012) y el modelo MTSK. Esto permite que las tareas formuladas estén vinculadas a la formación inicial de profesores de matemáticas, en concordancia con las necesidades del currículo de matemáticas de la educación secundaria de Costa Rica y con las categorías del KoT. De esta manera, se ha creado un instrumento e indicadores de conocimiento que permite obtener información contextualizada a través de la triangulación de fuentes.
4. Testificar los registros completos de todas las fases del proceso de investigación: la formulación de problema, la selección de los participantes, las notas de trabajo de campo, las transcripciones de los datos y las decisiones de análisis de los datos; todo esto de

manera accesible para el lector. Por ello, el trabajo sistemático en la realización de cada una de las fases de la investigación es un criterio de validez de los resultados.

3.4. ESQUEMA METODOLÓGICO

Para finalizar con este capítulo, en la figura 10 se presenta el esquema sobre la organización metodológica que orientó esta investigación.

Figura 10.
Esquema metodológico



4. CAPÍTULO IV: RESULTADOS

Este capítulo consta de cinco apartados, en los cuatro primeros se presentan los resultados de la investigación organizados según las categorías del conocimiento de los temas (Kot) dentro del dominio del conocimiento matemático del modelo MTSK y en el quinto se hace una síntesis de los resultados de los cuatro apartados anteriores.

El primer apartado, denominado *4.1. Categoría. Definiciones, propiedades y sus fundamentos* se presentan los resultados sobre el conocimiento de los PMFI de la definición, las propiedades y los fundamentos de la noción clásica de probabilidad.

En el segundo apartado, denominado *4.2. Categoría. Registros de representación* se presentan los resultados sobre los distintos registros de representación semiótica que utilizan los PMFI, en los cuales puede representarse la probabilidad de un evento, o bien, los puntos muestrales de un experimento asociados con la definición clásica de probabilidad.

En el tercer apartado, denominado *4.3. Categoría. Fenomenología y aplicaciones* se presentan los principales hallazgos sobre el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial (PMFI) de los fenómenos o contextos en los que se sitúa la noción clásica de probabilidad.

En el cuarto apartado, denominado *4.4. Categoría. Procedimientos* se presentan los resultados sobre las evidencias de conocimientos de los PMFI asociadas a los procedimientos en la resolución de problemas relacionados con la noción clásica de probabilidad.

Finalmente, en el quinto apartado denominado *4.5 Síntesis de los resultados*, se presentan de manera resumida los resultados de los cuatro apartados anteriores y su vínculo con los objetivos específicos planteados en este trabajo.

Es esencial tener en cuenta que las categorías e indicadores utilizados en este estudio no deben considerarse mutuamente excluyentes. Esto significa que un solo participante puede caer en múltiples categorías o mostrar múltiples indicadores. Por lo tanto, en el caso de frecuencias absolutas, la suma de estas categorías no necesariamente coincidirá con el número total de participantes.

4.1. CATEGORÍA. DEFINICIONES, PROPIEDADES Y SUS FUNDAMENTOS

Esta categoría permite reconocer los conocimientos con los que cuentan los PMFI en la probabilidad clásica, focalizando la atención en lo que sabe acerca de la definición, las propiedades y los fundamentos de estas.

En primer lugar, se aborda las evidencias de conocimiento de los sujetos en brindar una definición de la probabilidad clásica. En la Tarea 2, los sujetos debían definir la noción clásica de probabilidad. En la tabla 12, se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para esta categoría.

Tabla 12.

Los sujetos y la cantidad de sujetos que evidencia conocimiento en la Tarea 2

Indicadores de conocimiento	Sujetos que evidencian conocimiento	Cantidad
Conocimiento sobre el cociente del número de resultados favorables y el número de todos los resultados posibles al definir el significado clásico de probabilidad.	PMFI02, PMFI04, PMFI06, PMFI07, PMFI08, PMFI09, PMFI11, PMFI12, PMFI13	9
Conocimiento de que los puntos muestrales del espacio muestral tienen que ser equiprobables al definir el significado clásico de probabilidad.	PMFI02, PMFI03, PMFI04, PMFI11, PMFI13	5

De acuerdo con la tabla anterior, se puede apreciar que, al definir el enfoque clásico de probabilidad, nueve de trece profesores aluden al cociente entre casos favorables y el número total de resultados posibles. Cinco de trece sujetos hicieron referencia a la equiprobabilidad, lo cual es la esencia de la noción clásica. Es relevante destacar que únicamente cuatro sujetos: PMFI02, PMFI04, PMFI11y PMFI13; demostraron comprender ambos indicadores propuestos, es decir, mostraron conocimiento tanto sobre el cociente como sobre la equiprobabilidad al definir la probabilidad clásica.

A continuación, se presentan las respuestas de los sujetos de investigación PMFI02-2 y PMFI04-2 que dan evidencia de conocimiento de los indicadores relativos al cociente y a la equiprobabilidad.

> PMFI02-2. Si se realiza un experimento y puede producirse N resultados que sean igualmente posibles que sucedan, y si dentro de estos resultados un evento cualquiera A puede ocurrir $n(A)$ veces, la probabilidad del evento está dada por: $P(A) = \frac{n(A)}{N}$.
>
> PMFI02-4. La probabilidad de que suceda un evento X esta dada por: $P(X) = \frac{m}{n}$ donde
> m: número de veces que ocurre un evento
> n: número de posibles casos, me parece que estos casos tenían la misma probabilidad de ocurrir.

Como se observa, los docentes en formación consideran dentro de su definición la equiprobabilidad, estas evidencias se muestran en las frases de: “igualmente posibles” y “misma probabilidad”. Aunado a lo anterior, el uso de la fracción es habitual dentro de los participantes.

Además, otros dos sujetos evidenciaron conocimiento para los indicadores que involucran el cociente y la equiprobabilidad. Para este último, no mencionaron de forma explícita este concepto, sino que hicieron uso de la circularidad de la definición, pues se requiere que los eventos posibles ya estén definidos previamente. Las respuestas que evidencian lo anterior son las siguientes:

> PMFI11-2. Considere el espacio muestral: $X \coloneqq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ donde para todo $i = 1, \dots, n$ sucede que x_i posee las mismas condiciones que x_j con $i \neq j$ y $j = 1, \dots, n$. Se define la probabilidad clásica de x_j como: $P(x_i) = \frac{1}{|X|}$
>
> PMFI13-2. Es la razón entre los casos posibles de un evento y el total de casos. Ejemplo: en la lotería sólo existe un número ganador entre 100 números. Por lo que la probabilidad de ser favorecido en esta es $\frac{1}{100}$

Con la frase del participante PMFI11-2 “posee las mismas condiciones” no significa que los elementos del espacio muestral tengan las mismas probabilidades, por lo que se considera que el profesor de matemáticas en formación inicial hace un uso equivocado de la terminología. Sin embargo, la persona participante define la probabilidad de cada elemento del espacio muestral como la misma, al utilizar la siguiente notación: $P(x_i) = \frac{1}{|X|}$; por lo que esta fracción corresponde a la equiprobabilidad de cada punto muestral. A su vez, utiliza el cociente de casos favorables, en este caso siempre es uno, entre la cardinalidad del conjunto X, que corresponde al número de resultados posibles.

El sujeto PMFI13-2 evidencia conocimiento enunciando la probabilidad como una razón, de igual manera, en el ejemplo que proporciona, hace referencia a la equiprobabilidad indicando que cualquiera de los 100 números puede ser el favorecido y que la probabilidad es $\frac{1}{100}$. En este sentido, para calcular la probabilidad se necesita suponer que los eventos posibles tienen ya asignada la misma probabilidad. Además, es un fenómeno habitual dentro de este enfoque clásico lo cual evidencia conocimiento sobre la categoría de fenomenología y aplicaciones.

Por otra parte, al definir el enfoque clásico, dos profesores de matemáticas en formación inicial utilizan la propiedad de que la probabilidad es un número entre 0 y 1. En este sentido, los sujetos evidencian conocimiento sobre que la probabilidad de un evento A cumple con $0 \leq P(A) \leq 1$. Este indicador no se considera dentro de esta tarea, porque es una propiedad y no un delimitador para brindar una definición de la probabilidad clásica.

A continuación, se muestra la respuesta de los dos profesores de matemáticas en formación inicial que manifiestan sobre la propiedad de que la probabilidad es un número entre 0 y 1. Sus respuestas son las siguientes:

> PMFI09-2. Es una proporción donde su valor esta entre 0 y 1. Dado un evento A, entonces la probabilidad de que A ocurra se puede calcular como $P(A) = \frac{\#\, casos\ favorables}{\#\, casos\ posibles}$
>
> PMFI10-2. Cálculo matemático de la posibilidad que existe de que un evento suceda, la cual, debe tener valores en un rango de 0 a 1.

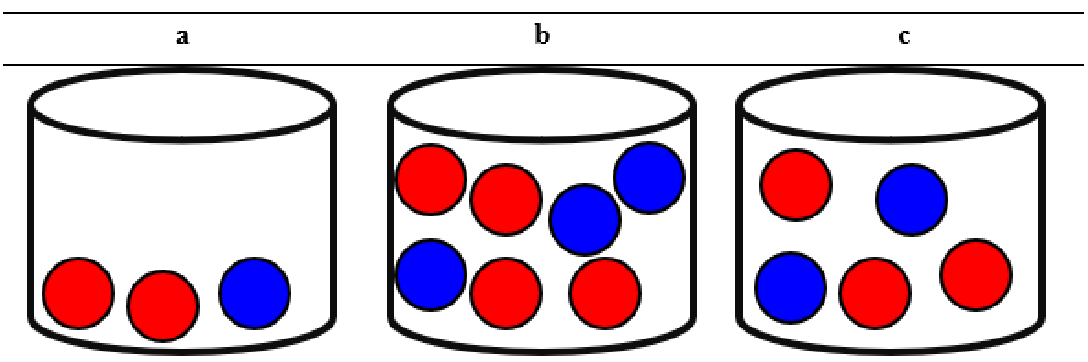
De acuerdo con lo anterior, los PMFI09-2 indica que la probabilidad es una proporción, que describe la relación entre el número de eventos favorables y el número de eventos posibles en un experimento aleatorio, además aluden a una propiedad indicando que la probabilidad es un número entre 0 y 1. Finalmente, el PMFI10-2 define la probabilidad clásica haciendo uso únicamente de una propiedad, sin evidenciar conocimiento del cociente y la equiprobabilidad.

Por su lado, un grupo de PMFI evidenciaron conocimiento para alguno de los dos indicadores, principalmente aluden al indicador del cociente, algunas respuestas representativas:

> PMFI06-2. $p = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$, con p probabilidad del evento.
>
> PMFI07-2. Sería tomar la cantidad de posibilidades que tengo a favor de un evento y dividirlo entre el total de posibilidades.
>
> PMFI12-2. Casos favorables entre el total de casos.
>
> PMFI03-2. Cuando existe la misma probabilidad que ocurran cada evento

La otra tarea que permite caracterizar el conocimiento de los PMFI en la categoría de definiciones, propiedades y sus fundamentos corresponde a la tarea 6 en los apartados b) y c). Dicha tarea se enuncia a continuación:

Un juego consiste en extraer una bola de alguna de las urnas a, b o c de forma aleatoria. Cada una de las bolas de cada urna tienen el mismo tamaño y la misma forma lo único que cambia es el color. El jugador gana si obtiene una bola de color rojo.



b) Enuncie un evento seguro haciendo uso de la información brindada en esta tarea 6 y calcule su probabilidad. Fundamente su respuesta del por qué toma ese valor.

c) Enuncie un evento imposible haciendo uso de la información brindada en esta tarea 6 y calcule su probabilidad. Fundamente su respuesta del por qué toma ese valor.

Esta tarea pretende caracterizar las evidencias de conocimiento de los PMFI en la fundamentación de dos propiedades vinculadas a la definición clásica: eventos seguros y eventos imposibles. A continuación, en la tabla 13, se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para esta tarea.

Tabla 13.

Los sujetos y la cantidad de sujetos que evidencian conocimiento en la Tarea 6 (partes b y c)

Indicadores de conocimiento	Sujetos que evidencian conocimiento	Cantidad
Conocimiento para deducir un evento seguro.	PMFI01, PMFI03, PMFI05, PMFI06, PMFI07, PMFI10, PMFI11, PMFI12	8
Conocimiento para deducir un evento imposible.	PMFI01, PMFI03, PMFI04, PMFI05, PMFI06, PMFI07, PMFI08, PMFI09, PMFI10, PMFI11, PMFI12	11
Conocimiento para deducir la propiedad de un evento seguro mediante la definición clásica de probabilidad.	PMFI03, PMFI12,	2
Conocimiento para deducir la propiedad de un evento imposible mediante la definición clásica de probabilidad.	PMFI03	1

Como se puede observar en la tabla anterior, la mayoría de los sujetos evidencian conocimiento sobre la forma de proceder en la deducción de eventos seguros e imposibles, conocen que se debe suponerse ciertas condiciones para restringir o ampliar el espacio muestral y ejemplifican de alguna manera porqué la propiedad toma los valores de 1 para un evento seguro y 0 para un evento imposible. No obstante, solamente dos sujetos percibieron la necesidad de expresar la validez de la propiedad mediante el uso de la definición clásica de probabilidad, precisamente mediante el cociente de casos favorables y posibles, las respuestas de los dos sujetos son:

> PMFI03-6b-6c. Que toda la urna este llena de bolas de color roja poque tendríamos $\frac{100}{100} = 1$ es la máxima probabilidad. Que toda la urna este llena de bolas azules tendríamos una probabilidad de $\frac{0}{100} = 0$. Por lo tanto, no existiría ninguna posibilidad que se gane.

> PMFI12-6b. Sacar una bola azul o roja:
>
> $$P(a) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1, \qquad P(b) = \frac{4}{7} + \frac{3}{7} = 1, \qquad P(c) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$

De acuerdo con lo anterior, la persona PMFI03-6b-6c aplica la fracción de casos favorables entre casos posibles, sin embargo, se desconoce por qué cuenta 100 casos posibles en la fundamentación de esos valores. Por otro lado, el sujeto PMFI03-6b utiliza la suma de los dos eventos posibles, la probabilidad de obtener bolas rojas y la probabilidad de obtener bolas azules; lo cual corresponde a la probabilidad del espacio muestral dado que son eventos mutuamente excluyentes, sin embargo, este participante no argumentó la probabilidad de un evento imposible.

Por su parte, los demás PMFI utilizan argumentos referentes al número de casos favorables, basan sus fundamentos en la cantidad o la no existencia de posibilidades sin ahondar en los valores de las probabilidades de eventos seguros e imposibles. Algunas respuestas representativas son las siguientes:

> PMFI05-6b-6c. Al extraer una bola de alguna urna, considere el evento:
>
> A: la bola es azul o roja
>
> Donde es claro que $P(A) = 1$ ya que siempre de cualquiera de las urnas se va a extraer una bola azul o roja.

> PMFI06-6b-6c. Siempre va a sacar una bola azul o roja. Probabilidad del 100%, pues siempre debe sacar una y solo hay de esos colores. Sacar una bola verde, 0%, pues no hay.

> PMFI07-6b-6c. Un evento seguro sería que para ganar se obtenga una bola de color azul o roja, la probabilidad es 1 pues solo se tienen puntos muestrales de esos colores. Un evento

imposible sería que para ganar se deba obtener una bola amarilla, la probabilidad sería cero, pues no tiene puntos muestrales a su favor.

PMFI11-6b-6c. A: la persona extrae una pelota de color roja o azul. $P(A) = 1$. El motivo por el cual es 1 es debido a que su espacio muestral considera todas las posibles combinaciones del experimento. A: obtener una bola negra. $P(A) = 0$. El motivo por el cual, su probabilidad es cero, es debido a que no contempla ninguna de las posibles combinaciones del experimento.

De acuerdo con las respuestas anteriores, se puede evidenciar que los PMFI logran justificar porque las probabilidades de eventos seguros e imposibles son 1 y 0, sin embargo, no hicieron uso de manera explícita de la definición clásica de probabilidad mediante el cociente de casos favorables y posibles para demostrar el por qué la probabilidad de dichos eventos toma esos valores. Las evidencias de conocimiento que se ha podido recopilar muestran indicios de conocimientos sobre la fundamentación de las propiedades de la probabilidad clásica.

Con base en los resultados presentados en este apartado, se aprecia que los PMFI evidencian conocimiento para definir la probabilidad clásica, sin embargo, no todos consideran la equiprobabilidad de los sucesos elementales, siendo esta concepción esencial dentro de la noción clásica de probabilidad. Por otro lado, la mayoría de los PMFI logran ejemplificar eventos seguros e imposibles, aunque pocos sujetos brindan las fundamentaciones de los valores de 0 y 1.

4.2. CATEGORÍA. REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

Esta categoría hace referencia al conocimiento sobre los distintos registros de representación semiótica que utilizan los PMFI, en los cuales puede representarse la probabilidad de un evento, o bien, los puntos muestrales de un experimento asociados con la definición clásica de probabilidad.

En primer lugar, para esta categoría se realizó un conteo de los distintos registros de representación utilizados por los PMFI en el todo el cuestionario. En la tabla 14, se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para esta categoría. Para este primer conteo no se tomó en cuenta la tarea 4, la cual será discutida más adelante.

Tabla 14.

Número de sujetos que evidencian conocimiento en los distintos registros de representación en las tareas 1, 2, 3, 5 y 6

Indicadores de conocimiento	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 5	Tarea 6		
					a	b	c
Conocimiento sobre la representación fraccionaria de la probabilidad de un evento.	1	3	1	6	12	7	7
Conocimiento sobre la representación decimal de la probabilidad de un evento.	0	0	0	0	10	0	0
Conocimiento sobre la representación porcentual de la probabilidad de un evento.	4	0	0	0	0	1	1
Conocimiento sobre la representación verbal de la probabilidad de un evento.	1	8	1	4	5	1	0
Conocimiento sobre la representación algebraica de la probabilidad de un evento.	0	3	0	0	0	0	0

Con base en la información presentada en la tabla 14, se observa que la fracción es el registro de representación más empleado para expresar la probabilidad de un evento, seguido por la representación verbal y la decimal. En menor medida, se utilizan la representación porcentual y la algebraica. La elección del registro de representación utilizado por los PMFI varía dependiendo del tipo de tarea y de cómo esta sea formulada. En la tabla 15 se muestran las respuestas representativas de los PMFI en relación con los registros de representación empleados en todas las tareas del cuestionario.

Tabla 15.

Respuestas representativas de los distintos registros de representación de la probabilidad de un evento en las tareas 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Registros semióticos	Respuestas representativas
Representación fraccionaria y decimal	PMFI09-5. Sea A obtener una bola roja $a)\ P(A)=\frac{2}{3}=0{,}66$ $b)\ P(A)=\frac{4}{7}=0{,}57$ $c)\ P(A)=\frac{3}{5}=0{,}6$ Tiene mayor probabilidad de ganar en la urna a) dado que obtuvo mayor probabilidad.
Representación algebraica	PMFI02-4. La probabilidad de que suceda un evento X esta dada por: $P(X)=\frac{m}{n}$ donde m: número de veces que ocurre un evento n: número de posibles casos, me parece que estos casos tenían la misma probabilidad de ocurrir.
Representación verbal	PMFI02-4. Casos favorables entre el total de casos.
Representación porcentual	PMFI06-6c. Siempre va a sacar una bola azul o roja. Probabilidad de 100%, pues siempre debe sacar una bola y solo hay esos dos colores.

La tabla anterior muestra los diferentes registros de representación de la probabilidad utilizados por los PMFI. En las tareas más procedimentales que implican el cálculo de probabilidades a partir de un experimento dado, se emplearon con mayor frecuencia la representación decimal y fraccionaria. Por otro lado, la representación algebraica y verbal se utilizaron con mayor frecuencia para definir la probabilidad clásica. En cuanto a la representación porcentual, se observa que se usó principalmente en tareas relacionadas con las propiedades de eventos seguros e imposibles, y también en la tarea 1, que se redactó en términos de porcentajes.

Por otro lado, la tarea 4 fue diseñada para caracterizar el conocimiento de los PMFI referentes a los registros de representación de los puntos muestrales de un experimento. En la primera parte, se les solicitó que representen los puntos muestrales obtenidos al lanzar simultáneamente una moneda de ₡100 y un dado de seis caras numeradas del 1 al 6, y que brinden una interpretación. En la segunda parte, se les pidió que utilicen una forma diferente a la anterior para representar el espacio muestral. Para esta tarea se habían establecido tres indicadores de conocimiento: (1) Conocimiento sobre la representación de todos los puntos muestrales del experimento, (2) Conocimiento de al menos, dos formas distintas para representar todos los puntos muestrales de un experimento y, (3) Conocimiento sobre la interpretación de los puntos muestrales del experimento dentro del registro de representación utilizado.

En la tabla 16, se presentarán los resultados de estos indicadores para cada uno de los 13 sujetos. Las columnas incluirán la evidencia de conocimiento en los indicadores (1) y (2), indicando el tipo de registro de representación utilizada. Además, se detallará si la representación utilizada en los indicadores (1) y (2) evidencian conocimiento para el indicador (3) para esta tarea 4.

Tabla 16.

Sujetos que evidencian conocimiento en la tarea 4 sobre los registros de representación.

Indicadores de conocimiento	Conocimiento sobre la representación de todos los puntos muestrales del experimento.	Conocimiento sobre la interpretación de los puntos muestrales del experimento dentro del registro de representación utilizado.	Conocimiento de al menos, dos formas distintas para representar todos los puntos muestrales de un experimento	Conocimiento sobre la interpretación de los puntos muestrales del experimento dentro del registro de representación utilizado.
Sujetos	Primer registro utilizado		Segundo registro utilizado	
PMFI01	Simbólica (duplas)	0	0	0
PMFI02	Diagrama de árbol pictórico	0	Simbólica (duplas)	1
PMFI03	Diagrama de árbol	1	Simbólica (duplas)	1
PMFI04	Simbólica (dupla)	1	Tabular	0
PMFI05	Simbólica (dupla)	1	Tabular	0
PMFI06	Simbólica (dupla)	0	Diagrama de árbol	0
PMFI07	Diagrama de árbol	0	0	0
PMFI08	Simbólica (dupla)	0	0	0
PMFI09	Simbólica (dupla)	0	Tabular	0
PMFI10	Simbólica (dupla)	1	Diagrama de árbol	0
PMFI11	Simbólica (dupla)	0	Diagrama de árbol	0
PMFI12	Diagrama de árbol	1	Simbólica (duplas)	1
PMFI13	Tabular	1	Diagrama de árbol	0
Total	13	6	10	3

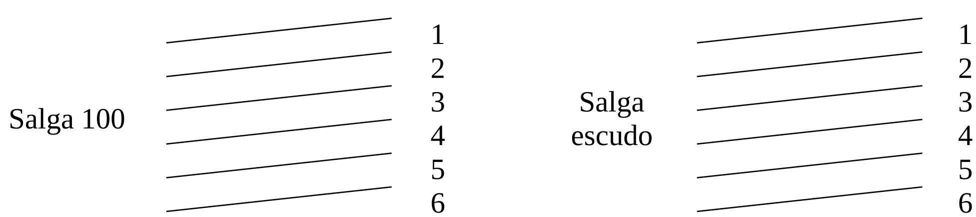
Nota: 1:=Evidencia de conocimiento, 0:=Sin evidencias de conocimiento

De acuerdo con los datos previos, se evidencia que la mayoría de los PMFI representan los puntos muestrales de un experimento dado, y a su vez, conocen de al menos dos formas distintas para representar todos los puntos muestrales del experimento. A pesar de ello, no todos los PMFI proporcionan una explicación o interpretación del tipo de registro de representación que han utilizado. Los PMFI utilizaron diferentes tipos de registros de representación. Entre ellos, se observa que once PMFI emplearon duplas, ocho PMFI usaron diagramas de árbol y uno de ellos de manera pictórica, es decir, representó la moneda y el dado mediante un dibujo y cuatro PMFI optaron por una representación tabular. Algunas respuestas, representativas son las siguientes:

> PMFI04-4a-4b. a) $M = \{E, C\}$, donde E: es escudo, C: es corona. $D = \{1,2,3,4,5,6\}$. D: Posibles resultados del lanzamiento el dado. M: Posibles resultados del lanzamiento de la moneda. Los posibles casos estarían dados por producto cruz. Es decir,
>
> $$M \times D$$
> $$= \{(E, 1), (E, 2), (E, 3), (E, 4), (E, 5), (E, 6), (C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6)\}$$
>
> b) Se me ocurre que simplemente un estudiante podría hacer dibujos de la moneda y el dado para representar el experimento. Una especie de representación tabular como la siguiente:

	1	2	3	4	5	6
E	E1	E2	E3	E4	E5	E6
C	C1	C2	C3	C4	C5	C6

> PMFI03-4a. Como la moneda solo tiene dos posibles casos puede ser donde indique 100 o que salga escudo. En cambio, los dados pueden salir números del 1 al 6 por lo que si la moneda se ve el 100 puede aparecer en los dados el número 1, 2, 3, 4, 5, 6. De la misma forma si sale escudo. Posibles resultados:



Otros de los PMFI que sí brindaron una interpretación de los puntos muestrales del experimento dentro del registro de representación utilizado hicieron uso del conocimiento de la definición clásica de probabilidad y un procedimiento habitual en el cálculo de probabilidades. La respuesta de este sujeto es la siguiente:

> PMFI12-4b
> $\{(E,1),(E,2),(E,3),(E,4),(E,5),(E,6),(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6)\}$
>
> Que salga un escudo o corona tiene un 50% de probabilidad. Que salga un número del dado cualquiera $\frac{1}{6}\cdot 100 = 16.66\%$ y que salga un número en especifico y corona $\frac{1}{12}\cdot 100 = 8.33\%$

Dado que no todos los participantes brindaron una interpretación de los registros de representación, las evidencias permiten sólo observar que los PMFI conocen estas representaciones sin ahondar en qué es lo que saben sobre estas. Aunque la interpretación del registro de representación utilizado podría considerarse implícito si los PMFI logra representar todos los puntos muestrales del experimento, es importante señalar que, para los fines de esta investigación y en base a los resultados descritos, no es posible profundizar en la interpretación más allá de lo que los sujetos describieron en la tarea 4.

No obstante, la tarea 5 también fue una de las tareas que permitió describir el conocimiento de los PMFI en cuanto a los registros de representación y su interpretación.

En esta tarea, se describe un juego que utiliza una ruleta dividida en cuatro sectores circulares e igual área, numerados con 1, 2, 3 y 5; y una urna con 3 bolas rojas (R) y 1 bola azul (A). El jugador gana si la ruleta se detiene en un número par y si saca una bola azul. Un estudiante hipotético, describe los posibles resultados:

$$\{(1,A);(2,A);(3,A);(5,A);(1,R);(2,R);(3,R);(5,R)\}$$

y determina que la probabilidad de ganar es de $\frac{1}{8}$. Finalmente, los PMFI debían argumentar si el procedimiento del estudiante era correcto o no.

En la tabla 17, se presentan los sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para esta categoría con su respectivo registro de representación utilizado.

Tabla 17.

Sujetos que evidencian conocimiento en la tarea 5 sobre los registros de representación.

Indicadores de conocimiento	Sujetos que evidencian conocimiento	Registro de representación utilizado
Conocimiento sobre la representación de todos los puntos muestrales del experimento.	PMFI05 PMFI07 PMFI11	Tabular
	PMFI12 PMFI13	Diagrama de árbol
Total	5	
Conocimiento de al menos, dos formas distintas para representar todos los puntos muestrales de un experimento	PMFI12	Simbólica (duplas)
Total	1	
Conocimiento sobre la interpretación de los puntos muestrales del experimento dentro del registro de representación utilizado.	PMFI05 PMFI07 PMFI11 PMFI12 PMFI13	No aplica
Total	5	

Según la tabla previa, cinco PMFI utilizaron un tipo de registro de representación que les permitió visualizar todos los puntos muestrales del experimento, con el fin de demostrar que la respuesta hipotética del estudiante era incorrecta. Es importante mencionar que estos cinco PMFI también proporcionaron una explicación o interpretación del registro de representación utilizado que justifica la probabilidad del evento, además, se resalta que los PMFI12 utiliza dos formas distintas para representar el experimento. Seguidamente, se presentan algunas respuestas representativas:

PMFI07-5.

	A	R	R	R
1	1 A	1R	1R	1R
2	2 A	2R	2R	2R
3	3 A	3R	3R	3R
5	5 A	5R	5R	5R

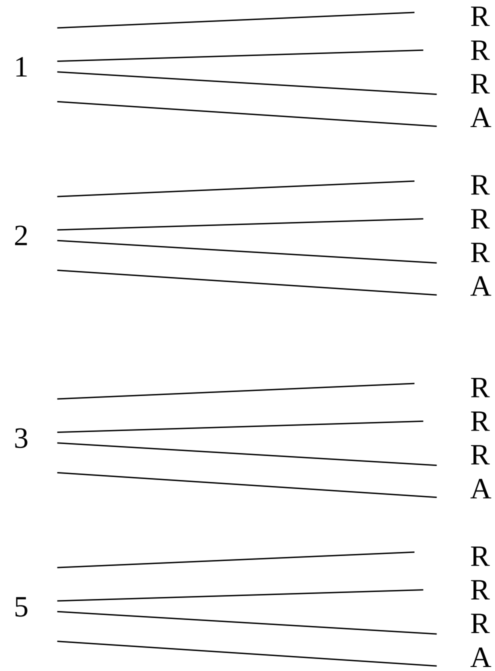
Tomando en cuenta este cuadro y lo que hizo el estudiante yo considero que está equivocado porque consideró solamente una bola roja y una bola azul, pero lo correcto era azul y 3 rojas, en donde la respuesta para ganar sería $\frac{1}{16}$.

El sujeto PMFI07-5 logra obtener todos los puntos muestrales del experimento al emplear una tabla de doble entrada. En dicha tabla, la primera columna representa las posibilidades de obtener 1, 2, 3 y 5, mientras que la primera fila corresponde a los colores de las tres bolas, que son azul y las tres bolas rojas. Seguidamente, el sujeto procede a registrar cada combinación posible en los cuadros correspondientes. De esta manera, el sujeto demuestra conocimiento para abarcar todas las combinaciones posibles y asegurarse de que en cada una de ellas haya al menos una bola de color rojo, cumpliendo así con el objetivo de ganar el juego.

Otra respuesta representativa, similar a la anterior, proviene del sujeto PMFI12-5, con la única diferencia de que, en lugar de emplear una tabla, opta por la creación de un diagrama de árbol y una representación simbólica en forma de dupla.

PMFI12-5. No porque el total de casos sería $4 \times 4 = 16$

Representación empleada



Procedimiento

$$\left\{\begin{matrix}(1,R),(1,R),(1,R),(1,A),\\(2,R),(2,R),(2,R),(2,A),\\(3,R),(3,R),(3,R),(3,A),\\(5,R),(5,R),(5,R),(5,A)\end{matrix}\right\}$$

$\{(2,A)\} \longrightarrow$ 1 caso

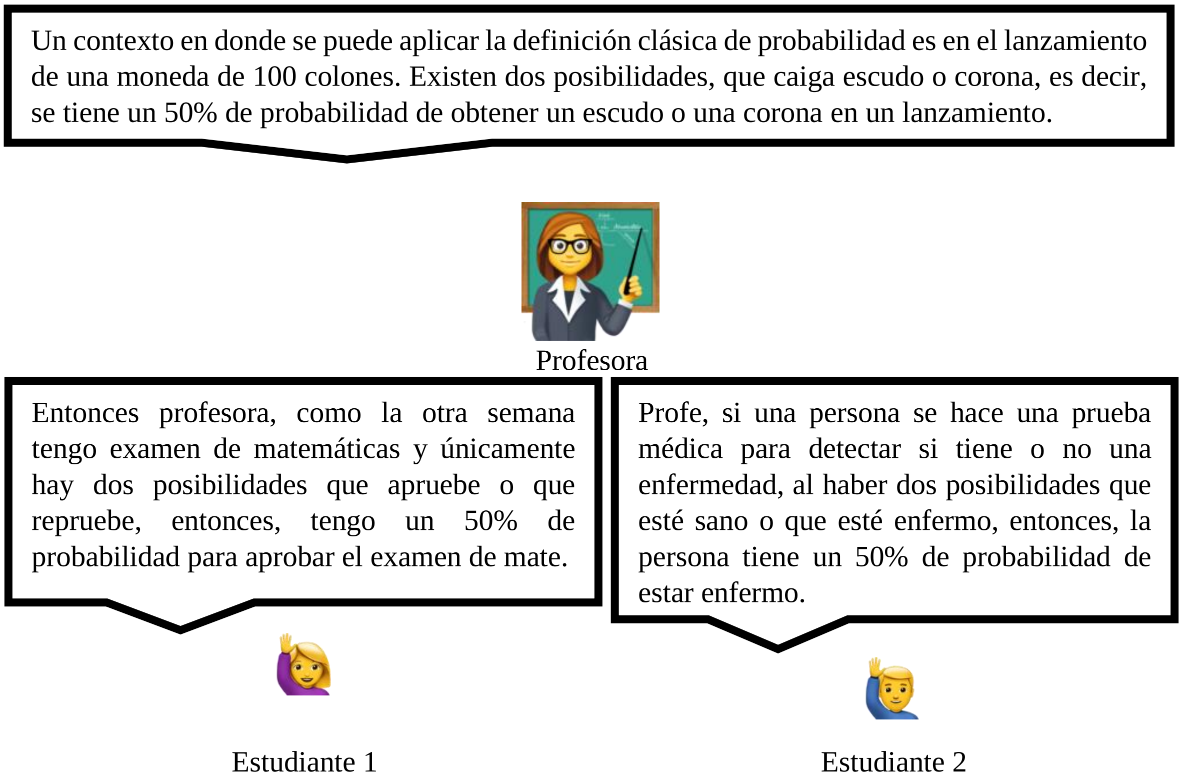
Probabilidad $\frac{1}{16}$

De acuerdo con las respuestas previas, el conocimiento, la interpretación y el manejo de los distintos registros de representación permite reconocer aspectos específicos del contenido matemático que sirven al docente como base para determinar de manera clara la probabilidad de los puntos muestrales del experimento. En otras palabras, el hecho de que haya ocho puntos muestrales en un conjunto de pares no garantiza que tengan igual probabilidad, por lo que es preciso emplear una representación que permita la visualización de todos los casos posibles. De esta manera, los registros de representación y las interpretaciones que realicen los PMFI permiten evidenciar si los procedimientos de solución de estas tareas son correctos o no.

Los resultados presentados en este apartado evidencian que la mayoría de los PMFI utilizan diferentes formas de representar la probabilidad de un evento y movilizan representaciones usuales dentro de la noción clásica, referentes al espacio muestral. Algunos PMFI utilizan distintos registros de representación dentro de una misma tarea con el objetivo de resolver o clarificar la solución del enunciado.

4.3. CATEGORÍA. FENOMENOLOGÍA Y APLICACIONES

Esta categoría hace referencia al conocimiento que posee el profesor de matemáticas en formación inicial sobre aquellos fenómenos o contextos en los que se puede situar la definición clásica de probabilidad. Dicha categoría está presente en las tareas 1 y 3. A continuación, se enuncia la tarea 1:



Con base en la historieta anterior, conteste la siguiente pregunta:
¿Son correctos los ejemplos proporcionados por los estudiantes? Justifique su respuesta.

De acuerdo con lo anterior, los PMFI debían indicar y argumentar si los contextos hipotéticos proporcionados por los estudiantes 1 y 2 eran correctos o no. Se resalta que los ejemplos descritos por el *Estudiante 1* y por el *Estudiante 2* son incorrectos, dado que ambos contextos no pueden ser repetidos bajo condiciones similares. Para la tarea 3, se les preguntó sobre situaciones matemáticas o contextos en donde se puede aplicar la definición clásica de probabilidad.

En la tabla 18, se presenta el número y los PMFI que dieron evidencia de conocimiento en sus respuestas para el único indicador de conocimiento definido para esta categoría de un total de 13 participantes.

Tabla 18.

Sujetos que evidencian conocimiento en la Tarea 1.

Indicador de conocimiento	En la respuesta del estudiante 1	En la respuesta del estudiante 2
Conocimiento sobre situaciones aleatorias en las que se pueden establecer puntos muestrales equiprobables.	PMFI03, PMFI04, PMFI06, PMFI09, PMFI10, PMFI11, PMFI13	PMFI02, PMFI06, PMFI08, PMFI10, PMFI11, PMFI13
Total	7	6

De acuerdo con la tabla anterior, se muestra que siete PMFI evidenciaron conocimiento al reconocer como incorrecto el ejemplo del *Estudiante 1* y seis sujetos indicaron como erróneo el del *Estudiante 2*. Se resalta que cuatro PMFI evidenciaron conocimiento al argumentar que ambos ejemplos proporcionados por los estudiantes hipotéticos eran incorrectos. Por su parte, los restantes profesores de matemáticas en formación solo evidenciaron conocimiento en alguna de las dos situaciones hipotéticas. Finalmente, cuatro profesores no evidenciaron conocimiento en sus respuestas en ninguna de las dos situaciones.

Del grupo de cuatro PMFI que evidenciaron conocimiento para ambas situaciones del *Estudiante 1* y el *Estudiante 2*, se resaltan que tres sujetos mostraron conocimiento del principio de indiferencia para justificar que ambas situaciones no poseen puntos muestrales equiprobables. Los sujetos indican que dichos contextos pueden verse afectados por numerosos factores lo cual no correspondería a fenómenos vinculados con la definición clásica de probabilidad. Algunas respuestas representativas son las siguientes:

> PMFI06-1. La del estudiante 1 no es correcto, ya que no se debe el aprobar o reprobar a una actividad “libre de condiciones”. Por ejemplo, si el estudiante ha estudiado o no, puede que tenga más probabilidad o menos de salir bien en el examen. Lo mismo sucede con el

> estudiante 2, puede que tenga antecedentes hereditarios o síntomas por los que se hizo el examen, que aumenten la probabilidad de estar enfermo.

> PMFI10-1. No, porque en el pasar o no el examen puede influir diversos aspectos. Por lo que, no se puede definir que exactamente tenga 50% de posibilidad de aprobar. Lo mismo sucede con el 50% de probabilidad de estar enfermo. puede haber otros factores influyentes.

> PMFI11-1. En los ejemplos dados por los estudiantes, los sucesos pueden verse afectados o influidos por diversos factores, a diferencia del dado por el profesor.

Según las evidencias de conocimiento presentadas por PMFI06-1, PMFI10-1 y PMFI11-1, resaltan que no es factible asegurar condiciones simétricas que respalden la equiprobabilidad, ya que los fenómenos mostrados pueden ser influenciados por varios factores.

El otro PMFI que evidenció conocimiento en sus respuestas para ambas situaciones argumentó de manera distinta, indicando que la respuesta hipotética del *Estudiante 1* no era equiprobable, dado que depende del porcentaje de aprobación. Es pertinente destacar que la argumentación llevada a cabo para indicar que el ejemplo del *Estudiante 2* no era el correcto lo hizo de manera similar a los otros tres PMFI descritos anteriormente. Su respuesta es la siguiente:

> PMFI13-1. Desde mi punto de vista, ninguno de los ejemplos que proporcionan los estudiantes son correctos, si bien es cierto, en ambos eventos plantean sólo hay 2 posibles opciones de respuesta, pero, para cada uno de ellos existen condiciones, aprobar un examen depende de si obtienen el 65% o 70% de las preguntas respondidas de forma correcta. También, una enfermedad depende de muchos factores que se asocian a cada individuo.

De acuerdo con lo anterior, la evidencia de conocimiento de PMFI13-1 está permeada por las condiciones iniciales del experimento, una ellas son si se obtiene el 65% o 70% de preguntas respondidas de forma correcta. Por tanto, este fragmento se considera como un intento de argumentación en el que los puntos muestrales no son simétricos.

A su vez, un grupo de tres profesores de matemáticas en formación inicial sólo argumentan como incorrecto el ejemplo proporcionado por el *Estudiante 1*. A continuación, se resaltan respuestas representativas:

> PMFI03-1. Considero que la primera estudiante reconoce la definición, pero no contempla que existe una nota determinada que expresa que aprobó y dicha nota en ocasiones es entre 65 al 100 y los restantes notas que indican que un estudiante reprobó note que hay más cantidad de notas referentes a reprobado entonces no puede decir que se tiene la probabilidad de 50%. En cambio, el estudiante 2, está en lo correcto porque o estas sano o enfermo.

> PMFI04-1. Estudiante 1: No es correcto el ejemplo proporcionado, ya que son situaciones de naturaleza distinta. En cuanto al examen existen diversos factores que pueden de algún modo favorecer o perjudicar el rendimiento de un estudiante en un examen. Estos factores pueden ser, por ejemplo, la cantidad de puntos que tenga la prueba o de horas de estudio que le dedique el estudiante, entre otras. Estudiante 2: Correcto, en este caso solo hay dos posibilidades, estar o no contagiado a nivel de lo que sería una prueba de laboratorio. No se puede estar “un poco menos contagiado” de una enfermedad.

El PMFI03-1 argumenta que los sucesos no son equiprobables pues depende de una nota corte para aprobar un examen, y utiliza ese argumento para justificar la no simetría de los resultados. Por su parte, el PMFI04-1 indica que el aprobar un examen se ve influenciado por factores que puedan ejercer un cambio en la probabilidad de los puntos muestrales y resaltando que es un fenómeno diferente al del lanzamiento de una moneda. Ambos sujetos indican que el ejemplo del *Estudiante 2* es correcto pues consideran que los sucesos del experimento aleatorio presentan la misma probabilidad, por ello ninguno de los dos sujetos evidenció conocimiento en el indicador propuesto.

Por su parte, dos PMFI evidenciaron conocimiento al argumentar, únicamente, que la respuesta del *Estudiante 2* era incorrecta al indicar que detectar una enfermedad puede estar permeada por diversas razones. Una respuesta ilustrativa es la siguiente:

> PMFI02-1. No, en el caso del estudiante #1, sí puede pasar lo que dice la estudiante. En el caso de la estudiante #2 la prueba que aplique puede que dé un resultado indetectable o indeterminado, debido a muchos factores y dependiendo el examen médico al que se someta una persona.

En el caso de los PMFI que argumentan como correcto alguno de los dos casos hipotéticos, se aprecia imprecisiones o la escasez para justificar la validez de los aspectos fenomenológicos de la definición clásica de probabilidad, entre ellos la no equiprobabilidad de los puntos muestrales. Asimismo, un PMFI indica como incorrecto las supuestas respuestas de los estudiantes 1 y 2, basando su argumento como una situación determinista y no aleatoria. De esta manera, ambos sujetos no evidencian conocimiento para el indicador propuesto. Las respuestas que ilustran lo anterior son las siguientes:

> PMFI05-1. Parcialmente correctos. Simplemente están confundiendo el ejemplo dado por la profesora, pero quizá esta debió primeramente definir un espacio muestral para el evento dado, y que a partir de este es que dependan las posibilidades. La percepción de los estudiantes radica en el hecho de creer que dos puntos muestrales implican siempre dos elementos en el espacio muestral, y no siempre es así.

> PMFI12-1. No, porque tirar una moneda es una situación aleatoria mientras que enfermarse o obtener una nota en el examen seria determinista.

Por otra parte, en la tarea 3, se les pidió a los sujetos mencionar sobre situaciones matemáticas o contextos en los que se puede aplicar la definición clásica de probabilidad con la intención de caracterizar el conocimiento sobre fenomenología y aplicaciones. El indicador utilizado para esta tarea es el mismo utilizado en la tarea 1, a saber: *conocimiento sobre situaciones aleatorias en las que se pueden establecer puntos muestrales equiprobables*. De los cuales, nueve de 13 sujetos manifiestan conocimiento sobre situaciones aleatorias en las que se pueden establecer puntos muestrales equiprobables al mencionar escenarios en donde es posible aplicar el enfoque clásico. En general, los ejemplos mencionados por los profesores en formación inicial corresponden a los prototipos clásicos como: cartas, dados, juegos de mesa, urnas y juegos de lotería.

A continuación, se presenta la respuesta del sujeto PMFI13-3 donde utiliza los juegos de lotería para ejemplificar una aplicación de la definición clásica de probabilidad, asimismo, utiliza la fracción de casos favorables entre casos posibles para describir la probabilidad de ser favorecido en el juego de lotería, de igual manera señala otro modelo clásico involucrado a la definición, el de lanzamiento de un dado.

> PMFI13-3. Hoy en día se han vuelto muy popular los llamados tiempos, los cuales, como se mencionó en la tarea anterior, la probabilidad de ser favorecido es de $\frac{1}{100}$, que a largo tiempo indica que sale favorecido una vez cada 100 veces que se apueste. También un ejemplo que se puede trabajar en clase es la suma de los puntos de lanzar 2 dados y ver que el resultado más frecuente es 7 a través de la repetición del experimento muchas veces.

Por su parte, una evidencia de conocimiento sobre la fenomenología de la probabilidad clásica se representa con la respuesta del PMFI04-3. El sujeto hace referencia a eventos mutuamente excluyentes al lanzar un dado, añadiendo la repetición del experimento. Aunado a esto, el sujeto indica un ejemplo en el cual no se puede aplicar la definición clásica, el de duplicar un grupo de bacterias en un determinado tiempo, destacando así diferentes factores que pueden llegar afectar a esta situación, que por lo general este fenómeno aleatorio es utilizado mediante la distribución binomial de probabilidad.

PMFI04-3. La clásica en situaciones que tengan una probabilidad de que ocurrir que sean mutuamente excluyentes. Ejemplo: la probabilidad de que al lanzar un dado 6 veces se repita el número 1. No se podría aplicar en situaciones como por ejemplo el tiempo en el que un grupo de n bacterias, tarda en duplicar su tamaño, ya que posiblemente esto dependa de múltiples factores externos como la temperatura, humedad, etc.

En general, los profesores en formación inicial aluden a fenómenos clásicos y algunos resaltan que el rango de aplicaciones que se puede mostrar con este enfoque es limitado, pues su esencia se centra en juegos de azar muy particulares. Se presentan las respuestas representativas de dos sujetos que evidencian conocimiento en sus respuestas.

> PMFI01-3. Casos como sacar una carta u objeto especifico en un conjunto del que no se sabe de forma predeterminada el resultado, se pueden tomar como eventos aleatorios que permiten ejemplificar la probabilidad.

> PMFI02-3. Se puede aplicar en contextos, donde la persona estudiante pueda desenvolverse, por ejemplo: si unos jóvenes se encuentran jugando un juego de mesa y al lanzar los dados desean saber cuál es la probabilidad de que la suma de los dados sea 10 o 12, que los números de los dados sean iguales o diferentes, entre otros.

> PMFI07-3. Se utiliza en los casos en donde los eventos son más simples por ejemplo cuando se tienen bolas verdes, rojas y azules, y se quiere saber la probabilidad de sacar sin ver una bola azul.

Un caso particular es del sujeto PMFI11-3 que dentro de sus ejemplos evidencia conocimiento, sin embargo, menciona otros contextos en donde la probabilidad clásica no es tan evidente.

PMFI11-3. En la vida real: tiempos, chances, análisis climático, análisis de crímenes. En las matemáticas: teoría de funciones discontinuas, teoría de números. Otras áreas: biología (ADN).

Además, se identificó evidencias de conocimiento de otro profesor de matemáticas en formación inicial, quien brinda una respuesta general sobre las aplicaciones de la probabilidad clásica, en el campo de la combinatoria. Aunque su respuesta es global y no profundiza en detalles, la probabilidad clásica sí se encuentra dentro de la teoría combinatoria. Su respuesta es la siguiente:

PMFI06-3. En combinatorias.

De igual manera, un profesor de matemáticas en formación inicial ejemplifica de una manera muy general, lo cual no es posible garantizar evidencias de conocimiento. A continuación, se presenta esta respuesta:

PMFI12-3. En casos que sean aleatorios se puede aplicar. En casos deterministas no se puede aplicar.

Con base en los resultados presentados en este apartado, se aprecia que gran parte de los profesores de matemáticas en formación inicial evidencian conocimiento para determinar situaciones o contextos tradicionales en los que se aplica la definición clásica de probabilidad, aunque pocos sujetos brindan fenómenos en donde no es posible aplicar la noción clásica de probabilidad. Por su parte, un poco más de la mitad de los PMFI logran discriminar si un fenómeno aleatorio se sitúa dentro del enfoque clásico de probabilidad o no, esto en experimentos que son afectados por diversos factores o que no pueden ser repetidos bajo las mismas condiciones iniciales. Finalmente, la otra parte de los PMFI sitúan el enfoque clásico de probabilidad en fenómenos no habituales siendo un enfoque con un rango de aplicaciones limitadas, o bien, caen en el sesgo de equiprobabilidad, al suponer que los puntos muestrales poseen la misma probabilidad.

4.4. CATEGORÍA. PROCEDIMIENTOS

Las tareas 5 y 6 permiten reconocer el conocimiento sobre los procesos de solución de problemas referentes al enfoque clásico.

La tarea 5 fue descrita en el apartado 4.2, y la tarea 6, consiste en extraer una bola de alguna de las urnas a (2 bolas rojas y 1 azul), b (4 bolas rojas y 3 azules) o c (3 bolas rojas y 2 azules) de forma aleatoria y los PMFI debían justificar en cuál de las tres urnas era más probable obtener una bola roja.

En la tabla 19 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para esta categoría.

Tabla 19.

Sujetos que evidencian conocimiento en la tarea 5 y tarea 6 sobre los procedimientos asociados al enfoque clásico de probabilidad

Indicadores de conocimiento	Sujetos que evidencian conocimiento en la tarea 5	Sujetos que evidencian conocimiento en la tarea 6
Conocimiento sobre las condiciones suficientes para aplicar la definición clásica en el cálculo de probabilidades.	PMFI01, PMFI05, PMFI07, PMFI08 PMFI11, PMFI12, PMFI13	Todos excepto PMFI04
Total	7	12
Conocimiento sobre el procedimiento del cociente de casos favorables entre casos posibles en el cálculo de la probabilidad de un evento.	PMFI05, PMFI07, PMFI09, PMFI12, PMFI13	Todos excepto PMFI04
Total	5	12
Conocimiento sobre las características del resultado en el cálculo de la probabilidad de un evento.	PMFI05, PMFI07, PMFI09, PMFI12, PMFI13	Todos excepto PMFI08 y PMFI10
Total	5	11
Conocimiento sobre los procedimientos alternativos en el cálculo de la probabilidad de un evento.	PMFI05, PMFI07, PMFI09, PMFI12, PMFI13	Ninguno
Total	6	0

Con base en la información presentada en la tabla 19, se puede observar que en la tarea 6, los PMFI tuvieron una mayor movilización de conocimientos que en la tarea 5. En dicha tarea, casi todos los sujetos evidencian conocimiento para los indicadores propuestos, aunque para el último indicador no hubo ninguno, dado que para resolver la tarea 6 no es habitual un procedimiento alternativo.

En línea con los datos presentados en la tabla 19, en la tarea 5, los PMFI debían determinar si el procedimiento hipotético era correcto o no. Cuatro PMFI indican que sí es correcto, y nueve indican que no lo es (evidenciando conocimiento). Sin embargo, de los nueve sujetos, los PMFI10 no evidencia conocimiento para ningún indicador, y los PMFI01 y PMFI08 solo evidencia conocimiento para el primer indicador, dado que argumentan que las condiciones dadas en el caso hipotético no son suficientes para aplicar la definición clásica de probabilidad pues no se consideran todas las posibilidades. Las dos respuestas son las siguientes:

> PMFI01-5. No es correcto puesto que no tomo en cuenta que existen 3 bolas rojas, solo tomo en cuenta una

> PMFI08-5. No es correcta, debido a que para el caso 1 tiene 4 posibilidades, pues son cuatro bolas distintas y él solo considero dos posibilidades (como si en la urna solo hubiese una bola roja y una azul) y lo mismo sucede para el resto de los números, tendrán cuatro posibilidades distintas para cada número ya que son cuatro bolas distintas.

Luego, seis PMFI emplean un registro de representación para enumerar todos los casos posibles e identificar el caso favorable y justificar el error del procedimiento hipotético, evidenciando procedimientos alternativos en el cálculo de la probabilidad de un evento pues luego hacen uso de la regla de Laplace, exceptuando el sujeto PMFI11, quien únicamente, enumera todos los casos posibles haciendo uso del diagrama de árbol más no calcula la probabilidad. A continuación, se muestran respuestas representativas:

> PMFI05-5. No. Lo que el estudiante está pensando que las 3 bolas rojas tienen la misma probabilidad de ser escogidas que la azul, es decir como si la urna solo tuviera una bola roja y otra azul. Lo recomendado sería hacer una tabla:

	R1	R2	R3	A
1	×	×	×	×

2	×	×	×	√
3	×	×	×	×
5	×	×	×	×

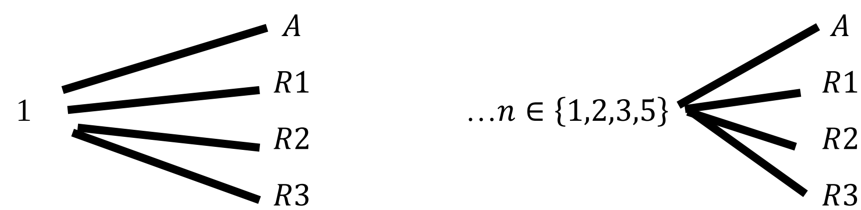
Y así se observa que la posibilidad es $\frac{1}{16}$

PMFI13-5.

Urna / Ruleta	Rojo	Rojo	Rojo	Azul
1	1 rojo	1 rojo	1 rojo	1 azul
2	2 rojo	2 rojo	2 rojo	2 azul
3	3 rojo	3 rojo	3 rojo	3 azul
5	5 rojo	5 rojo	5 rojo	5 azul

Respuesta. La respuesta llevada a cabo por el estudiante es incorrecta, debido que para los puntos muestrales está considerando que al obtener un color rojo tiene la misma probabilidad que el azul. Como se muestra en la tabla, existen 16 posibles formas de hacer la escogencia de la que solo una es la ganadora por lo que la respuesta correcta es $\frac{1}{16}$.

PMFI11-5. No, pues las bolas rojas son tres objetos diferentes digamos R1, R2 y R3, así al tirar la ruleta puede ocurrir, por ejemplo:



Además, un PMFI utilizó un procedimiento alternativo a los anteriores, en el cual calcula la probabilidad a partir de la propiedad de eventos independientes. Pese a ello, moviliza conocimiento de un procedimiento alternativo y aplica el cociente de casos favorables entre posibles, su respuesta es:

PMFI09-5. Son eventos independientes sean

A: obtener un # par. B: obtener una bola azul.

$$S_1 = \{1,2,3,5\}, P(A) = \frac{1}{4}$$

$$S_2 = \{R, A, R, R\}, P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

La Solución del estudiante no es correcta, dado que los eventos ocurren son independientes.

Finalmente, en la tarea 6, casi todos los PMFI movilizan el conocimiento habitual en el cálculo de probabilidades asociados al enfoque clásico de probabilidad. La mayoría de los PMFI utilizan la regla de Laplace para determinar en cuál urna es más probable obtener una bola roja. La mayor parte, conoce las características del resultado y utilizan una representación decimal con la finalidad de justificar cuál urna posee mayor probabilidad de obtener bola roja. Algunas respuestas alternativas son las siguientes:

> PMFI05-6. $p(a) = \frac{2}{3}, p(b) = \frac{4}{7}, p(c) = \frac{3}{5}$. Y es claro que $p(a) > p(b) > p(c)$. La urna "a" tiene mayor probabilidad.

> PMFI07-6. $P(R) = \frac{2}{3} \approx 0{,}66$ $P(R) = \frac{4}{7} \approx 0{,}57$ $P(R) = \frac{3}{5} \approx 0{,}6$. Utilizando la probabilidad clásica ganaría la urna a.

A modo de síntesis de los resultados obtenidos en este apartado sobre la categoría de procedimientos, podemos notar que los PMFI aplican la regla de Laplace como parte del procedimiento de solución de la tarea. Sin embargo, al proponer un caso hipotético cuatro PMFI vuelven a cometer el sesgo de equiprobabilidad, lo que deja de manifiesto la movilización del conocimiento referente a las condiciones necesarias para aplicar la definición clásica. Además, dos sujetos indicaron como erróneo un procedimiento, pero no justifican el por qué. En cambio, los PMFI que identificaron la no simetría del espacio muestral se apoyaron con un procedimiento alternativo que involucraba un registro de representación alterno.

4.5. SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS

A continuación, se presenta una síntesis de los resultados basada en el conocimiento especializado demostrado por los profesores en formación inicial (PMFI) en las cuatro categorías del KoT. En primer lugar, el instrumento utilizado para recopilar información demostró ser de gran utilidad al permitir la caracterización del conocimiento especializado de los PMFI. Este instrumento proporcionó datos que debían ser analizados de manera sistemática, y los indicadores de conocimiento resultaron ser de gran valor para caracterizar cada categoría del KoT en las respuestas de los PMFI.

En la categoría de la definición de probabilidad, se evidencia que los PMFI tienen conocimiento para definir la probabilidad clásica, aunque no todos consideran la equiprobabilidad de los sucesos elementales. La mayoría de los PMFI puede ejemplificar eventos seguros e imposibles, aunque pocos proporcionan una justificación adecuada para los valores de 0 y 1.

En cuanto a la categoría de registros de representación, se observa que la mayoría de los PMFI utilizan diversos formatos para representar la probabilidad de un evento, empleando representaciones usuales dentro de la noción clásica como representación porcentual, fraccionaria o decimal. Además, hacen uso de representaciones como diagramas de árbol, tablas o duplas para representar el espacio muestral. Asimismo, algunos PMFI utilizan varios registros de representación en una misma tarea para resolver o aclarar la solución.

En relación con la categoría de fenomenología y aplicaciones, los resultados evidencian que la mayoría de los PMFI demuestran comprensión en la identificación de situaciones tradicionales donde se aplica la probabilidad clásica. En cuanto a la capacidad de discernir si un fenómeno aleatorio se ajusta al enfoque clásico de probabilidad, aproximadamente la mitad de los PMFI lo logran, expresando que en fenómenos físicos o sociales se ven influenciados por múltiples factores. La otra parte de los PMFI sitúan la probabilidad clásica en situaciones poco habituales, siendo influenciados por el sesgo de equiprobabilidad.

Por último, en la categoría de procedimientos, se evidencia que los PMFI aplican la regla de Laplace para resolver problemas de probabilidad. Sin embargo, al plantear casos hipotéticos, cuatro PMFI cometen el error de equiprobabilidad, lo que refleja una falta de comprensión de las condiciones necesarias para aplicar la definición clásica de probabilidad y dos de PMFI no proporcionaron una justificación adecuada para demostrar por qué el procedimiento hipotético es incorrecto, a pesar de afirmar que no lo es. En contraste, aquellos PMFI que identificaron la asimetría en el espacio muestral utilizaron procedimientos alternativos que involucraban registros de representación diferentes.

5. CAPÍTULO V: CONCLUSIONES, LIMITACIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo se muestran las principales conclusiones derivadas de esta investigación. Se han ordenado de acuerdo con los objetivos planteados. Asimismo, se resaltan las limitaciones afrontadas en el desarrollo del estudio y, se señalan diversas recomendaciones dirigidas a la Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional, a los participantes y se brindan sugerencias para futuras investigaciones.

5.1 CONCLUSIONES

En este apartado se presentan las principales conclusiones de esta investigación, las cuáles se han organizado con base en los objetivos específicos propuestos. Para ello, se consideran cuatro secciones: 5.1.1 *Conclusiones sobre el conocimiento de las definiciones, propiedades y sus fundamentos,* 5.1.2 *Conclusiones sobre el conocimiento de los registros de representación*, 5.1.3 *Conclusiones sobre el conocimiento de la fenomenología y aplicaciones* y 5.1.4 *Conclusiones sobre el conocimiento de los procedimientos*. Adicionalmente, se presenta la sección 5.1.5 en donde se hace una reflexión general sobre el conocimiento de la noción clásica de probabilidad abordada en este estudio mediante el MTSK.

5.1.1 Conclusiones sobre el conocimiento de las definiciones, propiedades y sus fundamentos

Basado en la evidencia recopilada en esta investigación, se puede afirmar que la mayoría de los sujetos brindan una definición de probabilidad clásica, teniendo en cuenta al menos uno de los dos elementos que la componen: el cociente de casos favorables entre casos posibles y la consideración de la equiprobabilidad en el espacio muestral. Sin embargo, se observa que, en su mayoría, los PMFI descuidan la equiprobabilidad de los sucesos elementales y algunos emplean propiedades superfluas al proporcionar una definición.

Según lo mencionado por Escudero (2015) y, Carreño y Climent (2019), se evidencia que algunos profesores en formación inicial de matemáticas proponen definiciones que contienen propiedades necesarias y suficientes, lo que les permite deducir propiedades adicionales. Sin embargo, también se observa que otros profesores en formación inicial ofrecen definiciones que incluyen propiedades redundantes o innecesarias. Algunos de los PMFI presentan definiciones incompletas o con propiedades que no son necesarias, como afirmar que la probabilidad es un número entre 0 y 1, dado que esta propiedad se puede verificar mediante el cociente de casos favorables entre casos posibles.

Este resultado también se refleja en investigaciones similares, como en el estudio realizado por Contreras et al. (2013), donde se destaca que algunos profesores ofrecen definiciones imprecisas al agregar condiciones innecesarias. En línea con esto, se debe tener en cuenta lo mencionado por Zazkis y Leikin (2008), quienes sostienen que el conocimiento de las definiciones puede influir en las decisiones futuras de los profesores en relación con otras facetas del conocimiento especializado.

Estos hallazgos resaltan la relevancia de la importancia de una formación más precisa y rigurosa en la definición de probabilidad en los futuros docentes de matemáticas. Sería beneficioso considerar la distinción entre el conocimiento que un profesor de matemáticas tiene sobre las propiedades de un tema y su comprensión de las propiedades necesarias y suficientes para definir un objeto matemático. Esto contribuiría a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, permitiendo que los profesores en formación desarrollen una comprensión más precisa de las definiciones y las propiedades que hacen definible a un objeto matemático.

El hecho de que algunos PMFI descuiden la propiedad de equiprobabilidad al definir la probabilidad clásica pone de manifiesto que algunos no la con sideran en otras facetas del conocimiento, como al discernir si un procedimiento es correcto o al identificar fenómenos aleatorios donde sus puntos muestrales son o no equiprobables.

En cuanto a las fundamentaciones de las propiedades asociadas a la definición clásica, se observa que la mayoría de los PMFI logran proporcionar ejemplos de eventos seguros e imposibles y asignan los valores de probabilidad para estos eventos. En lo que respecta a las argumentaciones de estos cálculos de probabilidad, se debe destacar que se basan en la consideración de la aplicación de la regla de Laplace. Esto implica que los PMFI reconocen las condiciones necesarias para que un evento sea seguro o imposible, dándole a estos los valores de 1 y 0, respectivamente.

5.1.2 Conclusiones sobre el conocimiento de los registros de representación

El análisis realizado revela que la totalidad de los PMFI emplearon diferentes registros de representación en todas las evidencias de conocimiento recopiladas en el cuestionario. Esto concuerda con el énfasis dado en los programas de matemáticas de la Educación Secundaria de Costa Rica (MEP, 2012), que destaca la importancia del uso de diversos registros de representación, como diagramas y tablas, para simplificar el análisis probabilístico y reducir la dependencia de fórmulas, lo que permite establecer fácilmente los puntos muestrales a favor de cada evento.

Los PMFI demuestran un dominio adecuado en la utilización de diversos tipos de representaciones, como diagramas de árbol, tablas y representaciones simbólicas (duplas) en su mayoría cuando se les pide hacerlo. Esta movilización de conocimiento les permite a los PMFI enumerar los casos posibles, o bien, para algunos, argumentar la validez de un procedimiento hipotético.

De los registros de representación utilizados por los PMFI predomina el uso de la representación simbólica (duplas) seguidas de los diagramas de árbol y, en menor medida, la representación tabular. Al utilizar estas representaciones de manera efectiva los PMFI demuestran la capacidad para adaptarse y aprovechar las fortalezas de cada representación según el contexto con el objetivo de enumerar todos los casos posibles y, posteriormente, aplicar la regla de Laplace.

En este sentido, el conocimiento que los PMFI poseen sobre las distintas representaciones de un objeto matemático desempeña un papel fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido, respaldado por los resultados obtenidos por Escudero (2015) y Advíncula-Clemente et al. (2022). Estos estudios destacan que cuando los docentes en formación utilizan el conocimiento sobre las diversas representaciones de un objeto matemático, adquieren la capacidad de identificar aspectos concretos de las matemáticas que resultan beneficiosos para resolver problemas y emplear diferentes métodos didácticos al enseñar un contenido específico.

Además, como resalta Inzunsa y Guzmán (2011), la falta de uso y dominio de los registros de representación, como los diagramas de árbol, por parte de los profesores de matemáticas, conduce a la utilización de estrategias heurísticas y razonamientos intuitivos con sesgos o errores en sus planteamientos. Por ello, el uso de un conocimiento especializado en los registros de representación le permite al profesor de matemáticas identificar errores, como se observa en la tarea 5, donde los PMFI debían argumentar sobre la corrección de un procedimiento hipotético. Aquellos PMFI que emplearon registros de representación apropiados pudieron realizar este análisis de manera más precisa, mientras que aquellos que consideraron el procedimiento hipotético como correcto no hicieron uso de alguna representación lo que se ajusta a uno de los resultados brindados en la investigación de Gea et al. (2017). Por lo tanto, el no uso de algún registro de representación por parte de cinco PMFI conducen a argumentaciones erróneas inducidas por sesgos de equiprobabilidad o al cálculo erróneo de la probabilidad de un evento.

En resumen, se evidencia que los PMFI que movilizan su conocimiento sobre las distintas representaciones de la probabilidad pueden reconocer elementos particulares, y a su vez, brindan ventajas a la hora de abordar la resolución de una tarea. Estos hallazgos respaldan la importancia de promover la comprensión y aplicación de las diversas representaciones matemáticas en la formación de docentes, ya que esto les brinda herramientas adicionales para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad.

5.1.3 Conclusiones sobre el conocimiento de la fenomenología y aplicaciones

Se determinó que la mayoría de los profesores en formación inicial (PMFI) demuestran conocimiento sobre fenómenos usuales relacionados a los juegos de azar como lanzamiento de un dado o una moneda, juegos de lotería, bolas en una urna, característicos del enfoque clásico de probabilidad. Esto guarda relación con lo expuesto por Cotrado et al. (2022), quienes señalan que la mayoría de las situaciones abordadas en el enfoque clásico están vinculadas a juegos de azar, mientras que son escasos en otros contextos.

Sin embargo, es importante destacar que solo un poco más de la mitad de los PMFI logra discernir adecuadamente si un fenómeno aleatorio se enmarca en el enfoque clásico de probabilidad o no. Los PMFI muestran una tendencia en asumir la equiprobabilidad en situaciones como la probabilidad de aprobar un examen o la probabilidad de obtener un resultado positivo en una prueba de detección de enfermedades. Estos hallazgos están en concordancia con los resultados obtenidos por Cardeñoso et al. (2017), quienes destacan que algunos futuros docentes hacen un uso excesivo del concepto de equiprobabilidad al proporcionar estimaciones probabilísticas. Además, Rouan y Pallascio (1994) mencionan que esta suposición de equiprobabilidad se basa en la idea de que los sujetos tienen la creencia de que todos los resultados de un fenómeno aleatorio son igualmente probables.

Además, según Batanero et al. (2005), los profesores en formación tienden a mostrar sesgos de equiprobabilidad y heurísticas de representatividad, y esto se refleja en las evidencias de conocimiento de algunos PMFI al discriminar situaciones o fenómenos que no están dentro del ámbito del enfoque clásico de probabilidad.

Esta conclusión pone de relieve la importancia de fortalecer la comprensión y discriminación de los fenómenos probabilísticos en la formación inicial de los profesores de matemáticas, tanto en aquellos que implican equiprobabilidad como en aquellos que no. Además, en los programas de estudio de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP, 2012), se enfatiza la importancia de señalar a los estudiantes que, para poder utilizar la definición clásica de probabilidad, es necesario que los puntos muestrales sean igualmente probables. Esto subraya la necesidad de proporcionar una formación sólida que promueva una comprensión adecuada de los fundamentos probabilísticos y de cómo aplicarlos correctamente en diferentes situaciones.

Por el contrario, se observa que los PMFI que evidencian conocimiento al distinguir los fenómenos que no tienen puntos muestrales equiprobables, como la prueba de detección de enfermedades o la probabilidad de aprobar un examen, son capaces de proporcionar argumentaciones fundamentadas que demuestran que estos contextos son más complejos que el simple lanzamiento de una moneda. Las evidencias de conocimiento de los PMFI se relacionan con lo mencionado por Batanero (2005), acerca de la inaplicabilidad de la definición clásica de probabilidad en experimentos con un número infinito de posibilidades o en casos donde el espacio muestral es finito, pero no simétrico.

En conclusión, aunque la mayoría de los PMFI demuestran conocimiento sobre fenómenos usuales en el enfoque clásico de probabilidad, se destaca la necesidad de fortalecer su capacidad para discernir adecuadamente los fenómenos probabilísticos y distinguir aquellos que se enmarcan en el enfoque clásico de probabilidad de aquellos que no lo hacen. Estos hallazgos respaldan la importancia de brindar una formación inicial sólida a los profesores de matemáticas, abordando los sesgos y heurísticas comunes en la comprensión de la probabilidad y los fenómenos asociados.

5.1.4 Conclusiones sobre el conocimiento de los procedimientos

En esta investigación, se observa que la mayoría de los participantes evidencian conocimiento para calcular la probabilidad de eventos simples utilizando la regla de Laplace. Sin embargo, se encontró que una gran parte de los profesores en formación inicial presentan argumentaciones poco plausibles al explicar en qué condiciones se puede aplicar esta regla. Es decir, tienden a utilizar el enfoque clásico de probabilidad en espacios muestrales no equiprobables. Esta conclusión se vincula con los hallazgos de Burbano-Pantoja y Valdivieso-Miranda (2021), quienes indican que los docentes poseen un conocimiento básico del tema de probabilidad basado en el enfoque clásico.

Por otro lado, se observa que el hecho de que los profesores en formación inicial sean capaces de calcular correctamente la probabilidad no garantiza que todos ellos puedan argumentar si un procedimiento hipotético es correcto o no. Este hecho hace pensar que es más sencillo llevar a cabo un procedimiento probabilístico que justificar porque un procedimiento es incorrecto. Según Rodríguez-Alveal et al. (2018), en algunos casos, los profesores en formación muestran una formación más orientada hacia lo procedimental que hacia lo conceptual, lo que limita su capacidad para desarrollar argumentaciones. Sin embargo, aquellos profesores que demuestran habilidades argumentativas destacan al presentar explicaciones coherentes respaldadas por los elementos de la definición clásica.

Según indica Carrillo et al. (2018), el conocimiento especializado en esta categoría abarca diversos aspectos, incluyendo la capacidad de realizar cálculos de probabilidad. En este sentido, los PMFI demuestran poseer un conocimiento procedimental en este ámbito. Sin embargo, no todos logran evidenciar un conocimiento acerca de cuándo aplicar la regla de Laplace, lo cual implica comprender las condiciones necesarias y suficientes para utilizar un algoritmo específico. Coincidiendo con las afirmaciones de Batanero (2004), se observa que el principal error radica en el sesgo de equiprobabilidad, en el cual los profesores consideran que los diferentes sucesos son equiprobables, aplicando así la definición clásica de probabilidad. Esto revela una comprensión condicionada de los principios subyacentes a los algoritmos. No obstante, es importante destacar que todos los PMFI cuentan con conocimientos sobre las características del objeto resultante.

En conclusión, los hallazgos obtenidos en este estudio sobre la categoría de procedimientos destacan que los PMFI aplican la regla de Laplace como parte de su enfoque para resolver las tareas planteadas. Sin embargo, al enfrentarse a casos hipotéticos, se evidencia que los PMFI vuelven a caer en el sesgo de la equiprobabilidad, lo cual revela una limitación en la movilización del conocimiento referente a las condiciones necesarias para aplicar la definición clásica de probabilidad. Por otro lado, se observa que aquellos PMFI que lograron identificar la falta de simetría en el espacio muestral optaron por utilizar un procedimiento alternativo que involucraba el uso de una representación distinta, evidenciando conocimiento en: ¿Como hacerlo? ¿Cuándo hacerlo? y ¿Por qué se hace de esta manera?

5.1.5 Reflexión general sobre el conocimiento de la noción clásica de probabilidad abordada en este estudio mediante el MTSK

Como destacan distintas investigaciones que utilizan el MTSK, el KoT es uno de los subdominios en los que más información se puede obtener y es de vital importancia como base para la enseñanza desde una perspectiva matemáticas y didáctica dado que muestra relación con todos los subdominios del MTSK (Escudero, 2015; Advíncula-Clemente et al., 2022; Cordero, 2021). Las tareas propuestas permitieron indagar sobre el KoT que evidencian los profesores de matemáticas en formación inicial que participaron en el estudio de la Universidad Nacional en Costa Rica. Del análisis realizado, se puede concluir que los PMFI movilizan distintas categorías del KoT en el tema de probabilidad clásica.

El MTSK permitió profundizar en la comprensión del conocimiento que movilizan los PMFI cuando resuelven tareas de probabilidad clásica. Además, permitió realizar un análisis minucioso a través de la categorización y descripción de los subdominios del KoT. Este análisis contribuirá a la identificación y comprensión del conocimiento especializado del profesorado de matemáticas necesario para su desempeño profesional en la educación secundaria.

Además, los indicadores propuestos para cada una de las categorías del subdominio del conocimiento de los temas (KoT) asociados a la noción clásica de probabilidad, permitieron caracterizar el conocimiento especializado de los profesores de matemáticas en formación inicial de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de las matemáticas de la Universidad Nacional en Costa Rica.

Asimismo, se considera que esta investigación podría contribuir para que los profesores de matemáticas en formación inicial reflexionen sobre la importancia de contar con un sólido conocimiento matemático sobre los temas que enseñarán a posteriori como docentes de matemáticas en servicio. Es fundamental que los futuros docentes comprendan la necesidad de desarrollar tanto un conocimiento procedimental como los saberes argumentativos y la detención de procedimientos incorrectos.

Por último, a partir del análisis realizado en relación con la pregunta de investigación, sobre el conocimiento especializado del contenido matemático manifestado por los PMFI con relación a la noción clásica de probabilidad se concluye que una gran parte de los PMFI tienen conocimiento de conceptos claves para definir, fundamentar y describir las propiedades vinculadas a la definición clásica de probabilidad, sin embargo, se descuida ciertas propiedades importantes dentro de la definición clásica de probabilidad.

Además, se observa el manejo adecuado por parte de los PMFI de los distintos registros de representación específicos de este significado de probabilidad clásica, lo que resulta útil para plantear diversas formas en un tema. En torno a la fenomenología y aplicaciones del tema, se destaca el manejo de aplicaciones usuales encontradas en los programas de estudio de matemáticas de la educación secundaria en Costa Rica, propias del significado de probabilidad. No obstante, es importante señalar que una gran parte de los PMFI muestra un sesgo hacia la equiprobabilidad y tiende a utilizar heurísticas de representatividad. Esto puede ser atribuido a un conocimiento exiguo en algunos subdominios del KoT, que requieren mayor atención y desarrollo por parte de los PMFI.

5.2 LIMITACIONES

Las limitaciones presentes en el desarrollo de esta investigación incluyen:

1. Debido a la emergencia nacional provocada por el COVID-19, el cuestionario se aplicó de manera virtual. Esta modalidad puede haber afectado la interacción directa con los participantes y la posibilidad de realizar una entrevista en profundidad.

2. No se pudo aplicar la entrevista a todos los participantes debido a que algunos no respondieron a la solicitud realizada por correo electrónico. Aunque esta limitación no afectó el análisis de los datos recolectados, se perdió la oportunidad de obtener información más detallada y enriquecer los resultados.

3. La falta de información específica que relacione el contenido de probabilidad clásica con el modelo MTSK constituye otra limitación. La mayoría de las investigaciones consultadas como referentes bibliográficos se centran en el uso de otros modelos de conocimiento o en temas diferentes, como geometría o fracciones.

4. La ausencia de una investigación previa sobre los conocimientos en probabilidad de los profesores de matemáticas en formación en la Universidad Nacional también representa una limitación. Sin embargo, el pilotaje realizado fue de gran utilidad para superar esta limitación y obtener datos relevantes.

En consecuencia, este estudio se limita a describir los conocimientos de los profesores en formación y no se pudo validar los resultados mediante la triangulación con investigaciones previas de la universidad u otra fuente de recolección de información.

5.3 RECOMENDACIONES

Como resultado de esta investigación y tomando en cuenta la revisión teórica realizada en el desarrollo de este, se sugieren las siguientes recomendaciones.

5.3.1 Para la Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional de Costa Rica

Fomentar en los cursos de formación en probabilidad de la carrera de Enseñanza de las matemáticas en la Universidad Nacional, Costa Rica, el desarrollo de conocimientos basado en los subdominios del KoT. Es fundamental que las universidades proporcionen herramientas que permitan a los docentes analizar un tema desde diferentes perspectivas del conocimiento especializado, así como plantear situaciones de enseñanza y aprendizaje basadas en las diversas categorías del modelo MTSK.

Se sugiere llevar a cabo un análisis para determinar si en algún momento del proceso de formación inicial de los profesores de matemáticas se indaga sobre el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido empleando modelos de conocimientos del profesor de matemáticas, como el MTSK. Es importante investigar si se proporciona a los futuros docentes de matemáticas las herramientas y oportunidades necesarias para desarrollar un conocimiento especializado. Este análisis ayudará a identificar posibles áreas de mejora y a promover que la formación de los profesores proporcione una sólida base de conocimiento especializado en matemáticas.

Se recomienda considerar la formalización de aspectos relacionados con el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) dentro del currículo actual. Es deseable que los subdominios del MTSK sean abordados en la formación inicial de los profesores de matemáticas y que los profesores formadores sean conscientes de la importancia de enseñar en base a este modelo. De esta manera, los profesores en formación podrán comprender la relevancia de desarrollar habilidades y competencias específicas vinculadas a estos conocimientos especializados. Al incluir estas temáticas en el currículo, se fomentará una formación más completa y preparará a los futuros docentes de matemáticas para enfrentar los desafíos que surgen en el aula de manera más efectiva.

5.3.2 Para los profesores en formación inicial

A continuación, se detallan las recomendaciones para los profesores en formación inicial.

Es fundamental que los profesores en formación inicial sean conscientes de que el conocimiento que debe poseer un docente de matemáticas va más allá de lo puramente procedimental. Este conocimiento abarca una amplia gama de aspectos complejos y multidimensionales.

Por lo tanto, es importante que los profesores en formación inicial se comprometan a profundizar en diversas áreas de la disciplina y no se limiten a la formación inicial. Deben ser partícipes de un proceso de formación continua, que les permita actualizar y enriquecer constantemente sus conocimientos matemáticos y pedagógicos. Esto implica participar en actividades de desarrollo profesional organizadas por las universidades, como cursos, talleres, conferencias y grupos de estudio, que les brinden la oportunidad de estar al tanto de las nuevas investigaciones, enfoques pedagógicos y recursos didácticos. Al invertir en su desarrollo profesional de manera continua, los profesores en formación inicial estarán mejor preparados para enfrentar los desafíos cambiantes del campo de la educación matemáticas y brindar una educación de calidad a sus futuros estudiantes.

Asimismo, es importante considerar en el diseño de tareas matemáticas los conocimientos que propone la categoría del KoT para mejorar la integración de los distintos saberes que engloba un tema matemático.

5.3.3 Para futuras investigaciones

Dentro del quehacer científico en el campo de la educación matemáticas, se sugieren varias recomendaciones.

Replicar este estudio de manera longitudinal en los distintos niveles de formación de las carreras de educación matemáticas, con el objetivo de indagar el progreso de los conocimientos del KoT y el MTSK en general, del profesorado durante su formación. Esto permite conocer si se satisfacen las exigencias que propone el currículo del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica con el programa de formación inicial de profesores de matemáticas.

Llevar a cabo estudios similares a este, abordando otros subdominios del MTSK, asimismo, enfocar las investigaciones en otras áreas del conocimiento como: números, relaciones y álgebra, estadística y otros significados de probabilidad.

El instrumento creado en esta investigación podría ser utilizado en futuras investigaciones, tanto en su aplicación directa o como una guía en la construcción de instrumentos similares, de igual manera, se pueden aplicar a profesores en ejercicio. Asimismo, los indicadores de conocimiento creados en esta investigación pueden ser utilizados para analizar el conocimiento del profesor de matemáticas en otras facetas, como por ejemplo en una clase o en la construcción de otros indicadores para otras áreas de las matemáticas.

6. Referencias

Advíncula, A., Beteta, M., León, J. C., Torres, I. y Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para su investigación. *Uniciencia*. *Vol. 35(1)*, 190-209. http://dx.doi.org/10.15359/ru.35-1.12

Advíncula-Clemente, E., Beteta-Salas, M., León-Ríos, J., Torres-Céspedes, I., & Montes, M. (2022). Conocimiento especializado del profesorado de matemáticas en formación inicial acerca de los polígonos. *Uniciencia*, *36*(1), 99-115.

Alfaro, C., Flores, P. y Valverde, G. (2020). Conocimiento especializado de profesores de matemáticas en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. *PNA 14(2), 85-117*. https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/pna.v14i2.9363

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes its special? *Journal of Teacher Education, 59(5),* 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bastias, H. Alvarado, H. y Retamal, L. (2017). Explorando el significado intuitivo de probabilidad en profesores de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.). *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. *Granada: Universidad de Granada*.

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana. Revista de Educación Matemáticas de la UNL, 1*, 27-36.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa, RELIME*, *8*(3), 247-263.

Batanero, C. (2006). *Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo* [Conferencia]. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar. Granada, España: Sociedad de Educación Matemáticas Thales.

Batanero, C. (2009). *Retos para la formación estadística de los profesores* [Conferencia II]. En II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola. Universidade do Minho, 2009, Braga, Portugal.

Batanero, C. (2019). *Treinta años de investigación en educación estocástica: Reflexiones y desafíos* [Congreso]. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística. www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Batanero, C. (2020). Probability teaching and learning. In S. Lerman. (ed), *Encyclopedia of mathematics education*, 682-686. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

Batanero, C., & Díaz, C. (2007). The meaning and understanding of mathematics: The case of probability. *Philosophical dimensions in mathematics education*, 107-127.

Batanero, C., & Diaz, C. (2011). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*. http://chjs.deuv.cl/iFirst_art/ChJS010202.pdf.

Batanero, C., Godino, J. D., & Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train preservice school teachers. In *Proceedings of ICMI First African Regional Conference* (pp. 1-8). Johannesburgo: ICMI.

Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of statistics Education*, *12*(1). https://doi.org/10.1080/10691898.2004.11910715

Batanero, C., Gómez, E, Serrano, L., & Contreras, J.L. (2012). Comprensión de la Aleatoriedad por Futuros Profesores de Educación Primaria. *Journal of Research in Mathematics Education*, 1(3), 222-245. 10.4471/redimat.2012

Batanero, C., Henry, M., and Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed.) *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (15-37). Springer, New York. https://www.springer.com/gp/book/9780387245294

Batanero, C., Ortiz, J. J., Serrano, L., & Albanese, V. (2016). Razonamiento sobre probabilidad condicional en situaciones de riesgo. *Suma*, *83*, 73-80. http://revistasuma.es/

Batanero, C., y Díaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. En J. P. Van Bendegem and K. François (Eds.), *Philosophical dimensions in mathematics education*. (pp. 107-127). Springer, New York. https://www.springer.com/gp/book/9780387715711

Batanero, M. C., Fernandes, J. A., & Contreras, J. M. (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 62, 11-18.* ISSN 1130-488X.

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D., & Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema: Boletim de Educação Matemáticas*, *32*(61), 526-548. 10.1590/1980-4415v32n61a11

Bernal, C. A. (2010). *Metodología de la investigación* (*3era Edición*). Bogotá, Colombia: Pearson Education.

Borovcnik, M & Kapadia, R (2014). A Historical and Philosophical Perspective on Probability. In E.J. Chernoff, B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking, Advances in Mathematics Education,* (pp. 7-34). Missoula, United States: ©Springer Science + Business Media Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0

Brase, G. L., Martinie, S. & Castillo-Garsow, C. (2014). Intuitive Conceptions of Probability and the Development of Basic Math Skills. In E.J. Chernoff, B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking, Advances in Mathematics Education,* (pp. 161-194). Missoula, United States: Springer Science + Business Media Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0

Bryman, A. (2001). *Social Research Methods*. Oxford University Press.

Buendía Eisman, L., Colás Bravo, M., & Hernández Pina, F. (1998). *Métodos de investigación en psicopedagogía*. Mc Graw Hill.

Burbano-Pantoja, V. y Valdivieso-Miranda, M. (2021). Modelo del Pedagogical content Knowledge aplicado en probabilidad para la educación media. *Educación y Humanismo*, 23(41), 234-253. https://doi.org/10.17081/eduhum.23.41.4321

Cardeñoso, J. M., Moreno, A., García-González, E. y Jiménez-Fontana, R. (2017). El sesgo de equiprobabilidad como dificultad para comprender la incertidumbre en futuros docentes argentinos. Avances de Investigación en Educación Matemáticas, 11, 145-166. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i11.185

Cardeñoso, J.M., Moreno, A., García-González, E & Jiménez-Fontana, R. (2017). El sesgo de equiprobabilidad como dificultad para comprender la incertidumbre en futuros docentes argentinos. *Avances de Investigación en Educación Matemáticas*, 11, 145 – 166. http://www.aiem.es/index.php/aiem

Carreño, E., & Climent, N. (2019). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros. *PNA*, 14(1), 23-53. Recuperado de http://hdl.handle.net/10481/60153

Carrillo, J., Montes, M. A., Contreras, L. C., & Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 22, pp. 185-205).

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... & Ribeiro, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Casella, G., & Berger, R. L. (2002). *Statistical inference* (Vol. 2, pp. 337-472). Pacific Grove, CA: Duxbury.

Climent, N., Escudero-Ávila, D., Rojas, N., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M. C., & Sosa, L. (2014). El conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas. *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK, 42*. España.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research methods in education (6th ed.).* Londres: Routledge

Contreras García, J. M., Díaz Batanero, M. C., & Cañadas de la Fuente, G. R. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano Alcaraz, G. Gutiérrez Pereda, N. Climent Rodríguez, & A. Estepa Castro (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 238-244). ISBN 978-84-9860-843-4.

Cotrado, B., Burgos, M., & Beltrán-Pellicer, P. (2022). Idoneidad didáctica de materiales curriculares oficiales peruanos de educación secundaria en probabilidad. *Bolema: Boletim de Educação Matemáticas*, *36*, 888-922.

Cruz, J., Alfaro, C., & Guillen, H. (2021). Actas del V Congreso Iberoamericano sobre el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas CIMTSK 2021. En *Conocimiento Especializado de Profesores de matemáticas en formación inicial sobre la noción clásica de probabilidad* (pp. 216-223) https://cdn.congresse.me/ho20198vnz5ar0pp4l3wt33iit5t?fbclid=IwAR0f0roNjSLtOBvLOLgUcNdiJEmHZCUFtg_-g5yCp0cqs44V8kL5Ra-H7Nc

Cuevas, H., y Ramírez, G. (2018). Desempeño en estocástica entre profesores de educación secundaria: un estudio exploratorio en dos regiones de Costa Rica y México. *Educación matemáticas,* 30(1), 93-132. https://doi.org/10.24844/em3001.04

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. Routledge Library Editions: Curriculum.

Escobar-Pérez, J., & Cuervo-Martínez, Á. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en medición*, *6*(1), 27-36.

Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. [Tesis Doctoral] Universidad de Huelva, España.

Escudero-Domínguez, A., Joglar, N., Corrêa, D. y Reyes, A. (2016). Retrospectiva de las investigaciones sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de las matemáticas de la Universidad de Huelva* (pp. 69-86). SGSE: Huelva.

Estrada, A., & Batanero, C. (2011). Explaining teachers' attitudes towards statistics. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds), *Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education: Join ICMI/IASE Study*. Springer Science + Business Media B.V.2011 https://www.springer.com/gp/book/9789400711303

Estrada, A., Batanero, C., & Díaz, C. (2018). Exploring teachers' attitudes towards probability and its teaching. In C. Batenero y E. Chernof (Eds). *Teaching and learning stochastics* (pp. 313-332). Springer, Cham. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-72871-1_18

Estrada, A., Batanero, C., & Fortuny, J. M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación matemática*, *16*(1), 89-111.

Even, R. y Ball, D. L. (2009). Setting the stage for the ICMI study on the professional education and development of teachers of mathematics. In R. Even y D. L. Ball (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics* (pp. 1-9). Boston: Springer. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-0-387-09601-8_1

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*, 57-72.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report.

Gal, I (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In J. Graham (Ed). *Exploring probability in school* (pp. 39-63). Springer, Boston, MA.

Garrote, P. R., & del Carmen Rojas, M. (2015). La validación por juicio de expertos: dos investigaciones cualitativas en Lingüística aplicada. *Revista Nebrija de lingüística aplicada a la enseñanza de lenguas*, (18), 124-139.

Gea, M.M., Parraguez, R. y Batanero, C. (2017). Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemáticas XXI* (pp. 267-276). Zaragoza: SEIEM.

Gmurman, V. E. (1974). *Teoría de las probabilidades y estadística matemáticas*. Moscú Editorial.

Gómez, M. (2012). *Elementos de estadística descriptiva* (4ta ed.) San José, CR: EUNED

Greer, B (2014). Commentary on Perspective II: Psychology. In E.J. Chernoff, B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking, Advances in Mathematics Education*, (pp. 299-310). United States: ©Springer Science + Business Media Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (vol.6). México: McGraw-Hill.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Huerta, P. M. (2018). Preparing Teachers for Teaching Probability Through Problem Solving. In C. Batanero and E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics*, (pp. 293-310). Germany: Springer International Publishing AG 2018. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1

Hunt, D. E. (1976). Teachers are psychologists, too: On the application of psychology to education. *Canadian Psychological Review/Psychologie canadienne*, *17*(3), 210.

Jakobsson, U. &y Westergren, A. (2005). Statistical methods for assessing agreement for ordinal data. *Scandinavian Journal of sCaring Science*, 19(4), 427-431.

Krippendorff, K. (1990). Determinación de las unidades. En K, Krippendorff (Ed.), *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica* (pp. 81-92). España: Paidós Ibérica.

Laplace, P. S. (1795). *A Philosophical Essay on Probabilities* (1951 translation). Dover Publications, INC.

Lehrer, R., & English, L. (2018). Introducing children to modeling variability. In D. Ben-Zvi, K. Makar & J. Garfield (Eds). *International handbook of research in statistics education* (pp. 229-260). Springer, Cham.

León, J., Sosa L., Díaz, D. (2019). Conocimiento Matemático de Probabilidad que ponen en acción Profesores de Bachillerato. In Y. Morales-López y A. Ruíz (Eds). *Educación Matemática en las Américas: 2019*.

Liñán, M., Barrera, V., & Infante, J. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: La resolución de un problema con división de fracciones. *Escuela Abierta*, 17 (1), 41-63. 10.29257/EA17.2014.0

Liñán, M.M., Contreras, L.C., Barrera, V. (2016). Conocimiento de los Temas (KoT). En J. Carrillo, L.C Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de las matemáticas de la Universidad de Huelva* (pp. 12 -20). SGSE: Huelva.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa*. (5a ed). Madrid, España: editorial Pearson. Addison Wesley.

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor.

Montes, M.A. (2016). Las creencias en MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de las matemáticas de la Universidad de Huelva* (pp. 55-59). SGSE: Huelva.

Nabbout-Cheiban, M. (2016). Intuitive Thinking and Misconceptions of Independent Events: A Case Study of US and French Pre-Service Teachers. In G. Gueudet, E. Nardi, C.

Rasmussen (Eds). *The International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education.* Switzerland: ©Springer International Publishing. http://dx.doi.org/10.1007/s40753-016-0038-x

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). Principles Standards and for School Mathematics. Reston, United States: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. https://www.nctm.org/

Nuñez, R. (2007). *Taller de estadística y probabilidad: Juegos y trabajos para afianzar conceptos*. publicatuslibros.com

Pfannkuch, M., Budgett, S., Fewster, R., Fitch, M., Pattenwise, S., Wild, C., & Ziedins, I. (2016). Probability modeling and thinking: What can we learn from practice? *Statistics Education Research Journal, 15(2), 11-37*, http://iase-web.org/Publications.php?p=SERJ

Robles Garrote, P. y Rojas, M. D. C. (2015). La validación por juicio de expertos: dos investigaciones cualitativas en Lingüística aplicada. *Revista Nebrija de Lingüística Aplicada (2015)* 18. https://doi.org/10.26378/rnlael918259

Rodríguez F.A., Díaz L. D. y Vásquez O. C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios Pedagógicos XLIV*, N° 1: 135-156.

Rodríguez, D. G., & Valldeoriola, J. R. (2009). *Metodología de la investigación*. Universitat Oberta de Catalunya.

Rodríguez, S. J. (2003). Paradigmas, enfoques y métodos en la investigación educativa. *Investigación educativa*, 7(12), 23-40.

Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D., & Vásquez-Ortiz, C. (2018). Evaluación de la alfabetización probabilística del profesorado en formación y en activo. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *44*(1), 135-156. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052018000100135.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos*. [Tesis doctoral] Universidad de Granada, España.

Rojas, N., Carrillo, J., Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemáticas XVI,* 479 - 485. Jaén: SEIEM

Rouan, O., & Pallascio, R. (1994). Conceptions probabilistes d'éléves marocains du secondaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, *14*(3), 393-428.

Ruiz, A. (2017). Evaluación y Pruebas Nacionales para un Currículo de Matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemáticas*, 1-307.

Sanabria, G, (2019). La enseñanza determinista de la probabilidad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Shulman, L. S., (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. https://doi.org/110.3102/0013189x015002004

Skjong, R. & Wentworth, B. (2000). *Expert Judgement and risk perception*. Recuperado el 15 de Enero de 2006, de http://research.dnv.com/skj/Papers/SkjWen.pdf

Skorokhod, V. (2004). *Basic principles and applications of probability theory*. Springer Science & Business Media.

Stephens, S. K. y Wilkins, J. L. M. (2019). An undergraduate preservice teacher's mathematical and pedagogical content knowledge of conditional probability (pp.1192-1196). En Otten, S., Candela, A. G., de Araujo, Z., Haines, C., & Munter, C. (Eds.). *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. St Louis, MO: University of Missouri.

Universidad Nacional [UNA]. (2017). Plan de Estudios Carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de las matemáticas [BLEM]. Heredia, Costa Rica: EUNA. http://www.matematica.una.ac.cr/index.php/documentaciondigital/category/7planes-de-estudio

Vasco, D., Moriel, J. Jr. y Contreras, L.C. (2017). Subdominios del mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK). En J. Carrillo y L.C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de las matemáticas de la Universidad de Huelva* (pp. 29-37). Huelva: CGSE.

Wild, C. J., Utts, J. M., & Horton, N. J. (2018). What is statistics? In D. Ben-Zvi, K. Makar & J. Garfield (Eds). *International handbook of research in statistics education* (pp. 229-260). Springer, Cham. 10.1007/978-3-319-66195-7

Zakaryan, D., & Ribeiro, M. (2019). Mathematics teachers' specialized knowledge: a secondary teacher's knowledge of rational numbers. *Research in Mathematics Education*, *21*(1), 25-42.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square.*Educational Studies in Mathematics*, 69, 131–148.

Zieffler, A., Garfield, J., & Fry, E. (2018). What Is Statistics Education? In D. Ben-Zvi, K. Makar & J. Garfield (Eds). *International handbook of research in statistics education* (pp. 37-70). Springer, Cham. 10.1007/978-3-319-66195-7

7. Anexos

ANEXO 1

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

Instrumento

I Parte. Consentimiento informado

En el marco de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de las matemáticas (BLEM-2017) de la Universidad Nacional (UNA), para optar el grado de Licenciatura se debe elaborar un Trabajo Final de Graduación. Yo, *Jesús Daniel Cruz Quesada* con cédula *117040563* he de llevar a cabo mi Trabajo Final de Graduación de diseño cualitativo para obtener el grado de licenciatura.

El tema de investigación es: "*Conocimiento de la noción clásica de probabilidad de profesores de matemáticas en formación inicial de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de las matemáticas de la Universidad Nacional de Costa Rica durante el primer semestre del 2021*". La investigación tiene como propósito caracterizar el conocimiento de un grupo de profesores de matemáticas en formación a partir de tareas relacionados con la noción clásica de probabilidad.

La información recopilada en este cuestionario se empleará únicamente con fines investigativos, por lo cual, se garantiza la confidencialidad de la información, pues los datos personales no serán expuestos de ninguna manera luego del análisis de la información.

Este instrumento NO CONSTITUYE UNA PRUEBA O UN EXAMEN, pero es importante que responda a cada cuestión de forma individual, con base en sus conocimientos matemáticos, con creatividad y sinceridad en los espacios destinados para tal fin. Se solicita que sus respuestas sean lo más claras, amplias y explicativas posibles.

El cuestionario lo puede responder en hojas de papel (no hace falta que copie los enunciados), sin embargo, es necesario que indique claramente a cuál pregunta se está respondiendo. Una vez completado, deberá tomar fotografías de sus respuestas o escanearlas, o bien, si cuenta con algún recurso tecnológico lo puede resolver desde el mismo documento. Se recomienda generar un único documento en formato PDF con todas las respuestas. Deberá enviar la información al siguiente correo electrónico:

jesus.cruz.quesada@est.una.ac.cr

Esta investigación, se encuentra a cargo por:

Bach. Jesús Daniel Cruz Quesada
Estudiante tesista
jesus.cruz.quesada@est.una.ac.cr

Dr. Cristian Alfaro Carvajal
Tutor
cristian.alfaro.carvajal@una.cr

M Sc. Hellen Guillen Oviedo
Tutora
hellen.guillen.oviedo@una.cr

Información personal.

Nombre y apellidos: ____________________

Correo electrónico: _______________

Género: Femenino ___ Masculino ___ Otro ___

¿Debe algún curso de años anteriores al qué se encuentra? SÍ ___ NO____

Indique el año del Plan de Estudios de la Carrera en el que se encuentra: ___________________________

Se encuentra ejerciendo como profesor de matemáticas en alguna institución pública o privada: SÍ __ NO___

II PARTE. Instrumento

Instrucciones. El cuestionario se compone de seis tareas y en alguna de ellas se plantean preguntas. Conteste cada pregunta con responsabilidad y honestidad, de forma clara y ordenada, utilice lapicero de tinta azul o negra. Brinde sus respuestas lo más amplia y explicativa posible, de manera que se pueda tener una imagen más completa de sus ideas.

Tarea 1. Considere la siguiente historieta referida a una clase de probabilidad.

Un contexto en donde se puede aplicar la definición clásica de probabilidad es en el lanzamiento de una moneda de 100 colones. Existen dos posibilidades, que caiga escudo o corona, es decir, se tiene un 50% de probabilidad de obtener un escudo o una corona en un lanzamiento.

Profesora

Entonces profesora, como la otra semana tengo examen de matemáticas y únicamente hay dos posibilidades que apruebe o que repruebe, entonces, tengo un 50% de probabilidad para aprobar el examen de mate.

Profe, si una persona se hace una prueba médica para detectar si tiene o no una enfermedad, al haber dos posibilidades que esté sano o que esté enfermo, entonces, la persona tiene un 50% de probabilidad de estar enfermo.

Estudiante 1

Estudiante 2

Con base en la historieta anterior, conteste la siguiente pregunta: ¿Son correctos los ejemplos proporcionados por los estudiantes? Justifique su respuesta.

Tarea 2. ¿Qué es para usted la definición clásica de probabilidad? Para dar respuesta a esta pregunta enuncie una posible definición.

Tarea 3. ¿En cuáles situaciones matemáticas o contextos se puede aplicar la definición clásica de probabilidad? En caso de considerar que no se puede aplicar, explique el por qué y brinde un ejemplo. Fundamente su respuesta. No debe proporcionar ejemplos descritos en este instrumento.

Tarea 4. Considere el siguiente experimento:

Lanzamiento, al mismo tiempo, de una moneda de ₡100 y un dado de seis caras numeradas del 1 al 6

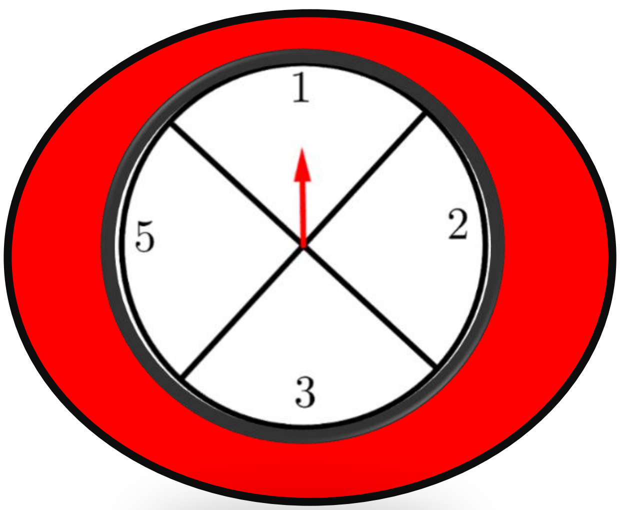
Con base en el experimento anterior:

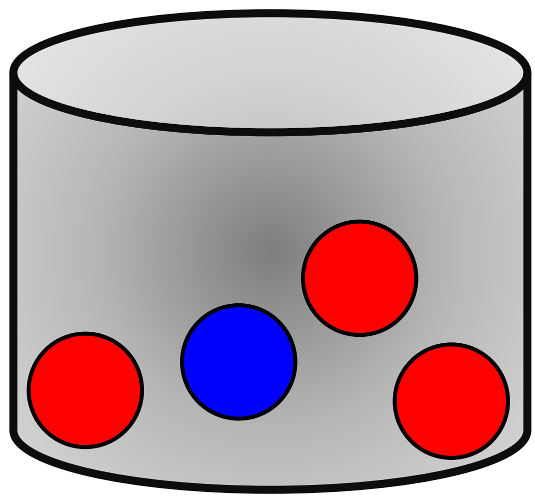
a) Represente todos los posibles resultados (puntos muestrales) del experimento y justifique el cómo se interpreta dicha representación.

b) ¿Conoce usted alguna o algunas otras formas distintas a la anterior para representar todos los posibles resultados del experimento? En caso afirmativo realice su representación y justifique el cómo se interpreta dicha representación.

Tarea 5. Se le propone el siguiente ejercicio a un estudiante de octavo año de un colegio de Costa Rica

En un juego se utiliza una ruleta la cual está bien equilibrada y una urna con 4 bolas. En el caso de la ruleta, la flecha queda fija y lo que gira es la ruleta, la ruleta esta divida en 4 sectores circulares y cada sector tiene la misma área. En el caso de la urna, cada una de las 4 bolas tienen el mismo tamaño y la misma forma lo único que cambia es el color. La ruleta y la urna se representan en los dibujos siguientes. Se gira la ruleta y se saca una bola de la urna todo esto al mismo tiempo. El jugador gana si la flecha se detiene en un número par y si saca una bola azul, en caso contrario el jugador pierde. Entonces, ¿cuál es la probabilidad de ganar?





A continuación, se muestra la solución llevada a cabo por un estudiante de octavo año:

Sea A: bola Azul y R: bola roja, los posibles resultados son:

$$\{(1, A); (2, A); (3, A); (5, A); (1, R); (2, R); (3, R); (5, R)\}$$

Entonces, únicamente hay un caso favorable para ganar:

$$\{(2, A)\}$$

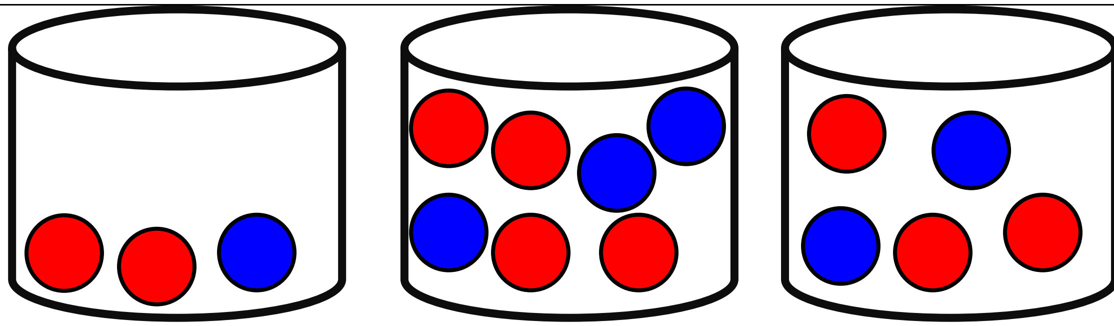
Además, hay 8 casos posibles. Por consiguiente, la probabilidad de ganar es

$$\frac{1}{8}$$

De acuerdo con la Tarea 5, ¿es correcto el procedimiento que ha llevado a cabo el estudiante de octavo año? Fundamente su respuesta.

Tarea 6. Un juego consiste en extraer una bola de alguna de las urnas a, b o c de forma aleatoria. Cada una de las bolas de cada urna tienen el mismo tamaño y la misma forma lo único que cambia es el color. El jugador gana si obtiene una bola de color rojo.

a	**b**	**c**



Con base en la información anterior, conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál de las tres urnas tiene mayor probabilidad de ganar el jugador? Justifique su respuesta.

b) Enuncie un evento seguro haciendo uso de la información brindada en esta **tarea 6** y calcule su probabilidad. Fundamente su respuesta del por qué toma ese valor.

c) Enuncie un evento imposible haciendo uso de la información brindada en esta **tarea 6** y calcule su probabilidad. Fundamente su respuesta del por qué toma ese valor.

Universidad Nacional de Costa Rica

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Escuela de Matemáticas

ANEXO 2

Instrumento de validación del cuestionario

El instrumento de validación del cuestionario está compuesto por dos partes. La primera parte consiste en observaciones generales sobre el cuestionario y la segunda parte corresponde a observaciones específicas. Agradezco de antemano, su valioso aporte en este proceso de formación académica.

Nombre completo	
Grado académico	
Área de especialización	

I Parte. Observaciones generales. Después de haber leído los documentos 1 y 2 realice comentarios u observaciones sobre aquellos aspectos que considera deben mejorarse.

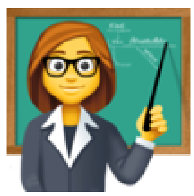
1. Refiérase sobre la longitud (cantidad de preguntas y tiempo de resolución)

2. Refiérase sobre la secuencia de las tareas.

II Parte. Observaciones específicas. En primera instancia lea y analice cada tarea, proponiendo una potencial respuesta. Luego, a partir de los indicadores marque una equis en las casillas relacionadas con el grado de acuerdo (muy de acuerdo, de acuerdo, desacuerdo o muy en desacuerdo) respecto a dicho indicador. En caso de ser necesario, realice observaciones generales. La sigla PMFI significa: Profesores de Matemáticas en Formación Inicial, es decir, son las personas participantes de la investigación.

Tarea 1.

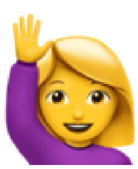
Para ejemplificar una aplicación del enfoque clásico de probabilidad podemos considerar el lanzamiento de una moneda de 100 colones, existen dos posibilidades que caiga escudo o corona, es decir, se tiene un 50% de posibilidad de obtener un escudo o una corona en un lanzamiento

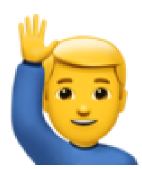


Profesora

Entonces profesora, como la otra semana tengo examen de matemáticas y únicamente hay dos posibilidades que apruebe o que repruebe, entonces, tengo un 50% de posibilidad de aprobar el examen de mate.

Profe, si una persona se hace una prueba médica para detectar si tiene o no una enfermedad, al haber dos posibilidades que este sano o que este enfermo, entonces, la persona tiene un 50% de posibilidad de estar enfermo





Categoría	Indicador	Grado de acuerdo			
		Muy de acuerdo	De acuerdo	Desacuerdo	Muy en desacuerdo
Suficiencia	La tarea permite obtener información sobre el conocimiento que tiene los PMFI sobre los contextos en el que es posible hacer uso del enfoque clásico de probabilidad y en cuáles no.				
Claridad	La tarea se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.				
Coherencia	La tarea tiene relación con los contextos en el que es posible hacer uso del enfoque clásico de probabilidad y en cuáles no.				
	La tarea tiene relación con el enfoque clásico de probabilidad				
Relevancia	El ítem es esencial o importante para esta investigación, es decir debe ser incluido				

Observaciones

Tarea 2.					
¿Qué es para usted la noción clásica de probabilidad? Para dar respuesta a esta pregunta enuncie una posible definición sobre la noción clásica de probabilidad.					
Categoría	**Indicador**	**Grado de acuerdo**			
		Muy de acuerdo	**De acuerdo**	**Desacuerdo**	**Muy en desacuerdo**
Suficiencia	La tarea permite obtener información sobre el conocimiento que tiene los PMFI sobre el conjunto de propiedades que hacen definible al enfoque clásico de probabilidad tales como: la equiprobabilidad y la fracción entre casos favorables y casos posibles, asimismo, como las distintas formas para definir la noción clásica.				
Claridad	La tarea se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.				
Coherencia	La tarea tiene relación con la definición clásica de probabilidad				
Relevancia	La tarea es esencial o importante para esta investigación, es decir debe ser incluido				

Observaciones

Tarea 3					
¿En cuáles situaciones matemáticas o de la vida cotidiana se puede utilizar la noción clásica de probabilidad y en cuáles no? Proporcione un ejemplo de cada uno (no debe proporcionar ejemplos descritos en este instrumento).					
Categoría	**Indicador**	**Grado de acuerdo**			
		Muy de acuerdo	**De acuerdo**	**Desacuerdo**	**Muy en desacuerdo**
Suficiencia	La tarea permite obtener información sobre el conocimiento que tiene los PMFI sobre los contextos en el que es posible hacer uso del enfoque clásico de probabilidad y en cuáles no.				
Claridad	La tarea se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.				
Coherencia	La tarea tiene relación con los contextos en los que es posible hacer uso del enfoque clásico de probabilidad y en cuáles no				
	La tarea tiene relación con la definición clásica de probabilidad				
Relevancia	La tarea es esencial o importante para esta investigación, es decir debe ser incluido				

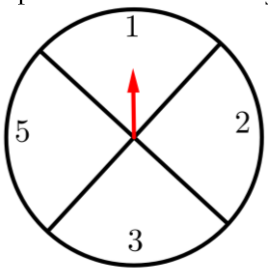
Observaciones

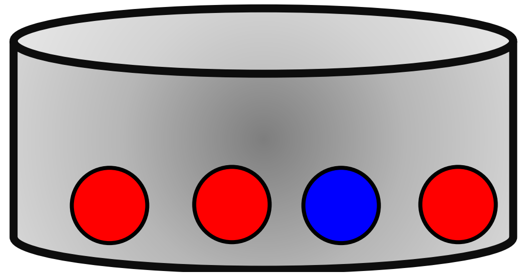
Tarea 4.					
Considere el siguiente experimento: *Lanzamiento, al mismo tiempo, de una moneda de ₡100 (considere escudo con la letra E y corona con la letra C) y un dado de seis caras numeradas del 1 al 6* Con base en el experimento anterior: c) Represente todos los posibles resultados (puntos muestrales) del experimento. d) ¿Conoce usted alguna o algunas otras formas distintas a la anterior para representar el espacio muestral (todos los puntos muestrales) del experimento? En caso afirmativo realice su representación.					
Categoría	**Indicador**	**Grado de acuerdo**			
		Muy de acuerdo	**De acuerdo**	**Desacuerdo**	**Muy en desacuerdo**
Suficiencia	La tarea permite obtener información sobre conocimiento que tiene los PMFI sobre las distintas formas en que se puede representar los puntos muestrales de un evento: tabular, verbal, esquemático y simbólica.				
Claridad	La tarea se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.				
Coherencia	La tarea tiene relación con las diferentes representaciones asociadas a los puntos muestrales de un experimento aleatorio en el que los resultados son equiprobables.				
	La tarea tiene relación con la definición clásica de probabilidad				
Relevancia	La tarea es esencial o importante para esta investigación, es decir debe ser incluido				

Observaciones

Tarea 5.

En un juego se utiliza una ruleta la cual está bien equilibrada y una urna con 4 bolas. Se gira la ruleta y se saca una bola de la urna todo esto al mismo tiempo. El jugador gana si la flecha se detiene en un número par y si saca una bola azul, en caso contrario el jugador pierde. La ruleta y la urna se representan en los dibujos siguientes.





Un primer jugador describe todos los posibles resultados del juego (espacio muestral), donde A: Azul y R: rojo:

$$\{(1, A); (2, A); (3, A); (5, A); (1, R); (2, R); (3, R); (5, R)\}$$

Conteste la siguiente pregunta:

a) ¿Los puntos muestrales descritos por el primer jugador poseen la propiedad de ser igualmente probable? Fundamente su respuesta.

Un segundo jugador describe los posibles resultados del juego de la siguiente manera:

$\{(1, A); (2, A); (3, A); (5, A); (1, R1); (1, R2); (1, R3); (2, R1); (2, R2); (2, R3); (3, R1); (3, R2); (3$

Conteste la siguiente pregunta:

b) ¿Los puntos muestrales descritos por el segundo jugador poseen la propiedad de ser igualmente probable? Fundamente su respuesta.

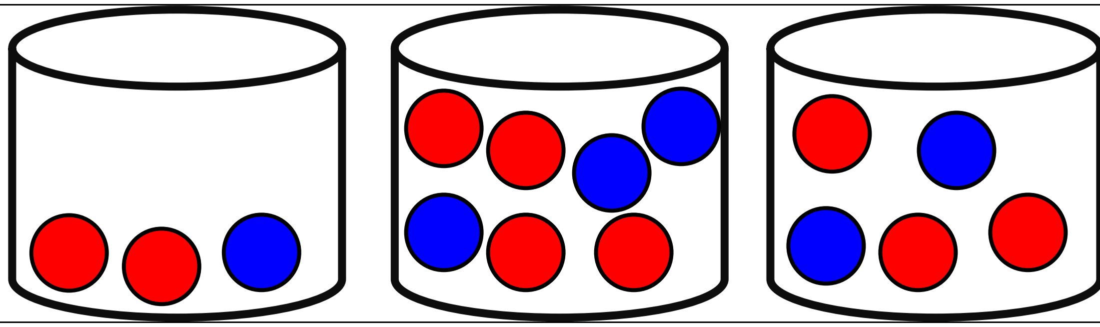
Categoría	Indicador	Grado de acuerdo			
		Muy de acuerdo	De acuerdo	Desacuerdo	Muy en desacuerdo
Suficiencia	La tarea permite obtener información sobre el conocimiento que tiene los PMFI sobre las propiedades específicas de la noción clásica de probabilidad y los fundamentos que estos tienen. Se considera la propiedad de equiprobabilidad en espacios muestrales.				
Claridad	La tarea se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.				
Coherencia	La tarea tiene relación con espacios muestrales que cumplan la propiedad de equiprobabilidad.				
	La tarea tiene relación con la definición clásica de probabilidad				
Relevancia	La tarea es esencial o importante para esta investigación, es decir debe ser incluido				

Observaciones

Tarea 6.

Un juego consiste en extraer una bola de alguna de las urnas a, b o c de forma aleatoria. El jugador gana si obtiene una bola de color rojo.

a	b	c



Con base en la información anterior, conteste las siguientes preguntas:

d) ¿Con cuál de las tres urnas tiene mayor probabilidad de ganar el jugador? Justifique su respuesta.

e) ¿Cuál es la probabilidad de un evento seguro? Proporcione un ejemplo haciendo uso de la información brindada en esta tarea 6, en el que se pueda enunciar un evento seguro, y argumente su respuesta.

f) ¿Cuál es la probabilidad de un evento imposible? Proporcione un ejemplo haciendo uso de la información de esta tarea 6, en el que se pueda enunciar un evento imposible, y argumente su respuesta

Categoría	**Indicador**	**Calificación**			
		Muy de acuerdo	**De acuerdo**	**Desacuerdo**	**Muy en desacuerdo**
Suficiencia	El ítem a) permite obtener información sobre el conocimiento que tiene los PMFI sobre los valores que puede tomar la probabilidad de un evento cualquiera, al identificar un evento más probable que otro, sabiendo que: $0 \leq P(E) \leq 1$				
	El ítem a) permite obtener información sobre el conocimiento que tiene los PMFI sobre los algoritmos para el cálculo de la probabilidad de un evento desde el enfoque clásico de probabilidad.				

	El ítem a) permite obtener información sobre el conocimiento que tiene los PMFI sobre las características del resultado en el cálculo de la probabilidad de un evento desde el enfoque clásico de probabilidad.				
	El ítem a) permite obtener información sobre el conocimiento de las condiciones necesarias para aplicar la definición clásica en el cálculo de probabilidades.				
	El ítem b) y c) permite obtener información sobre conocimiento que tiene los PMFI sobre las propiedades de: evento seguro y evento imposible.				
Claridad	El ítem a) se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas.				
	El ítem b) se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas				
	El ítem c) se comprende fácilmente, es decir, su sintáctica y semántica son adecuadas				
Coherencia	El ítem a) tiene relación sobre los valores que puede tomar la probabilidad de un evento cualquiera.				
	El ítem a) tiene relación sobre el cálculo de probabilidad desde el enfoque clásico				

	Los ítems a) b) y c) tiene relación sobre la propiedad de evento seguro, evento imposible y evento probable.				
	La tarea tiene relación con la definición clásica de probabilidad				
Relevancia	El ítem a) es esencial o importante para esta investigación, es decir debe ser incluido				
	Los ítems a) y b) son importantes para esta investigación, es decir debe ser incluido				

Observaciones