Una Forma Distinta para Hallar la Distancia de un Punto a una Recta*

Lic. Enrique Vílchez Quesada†
Universidad Nacional
Escuela de Matemática

Abstract

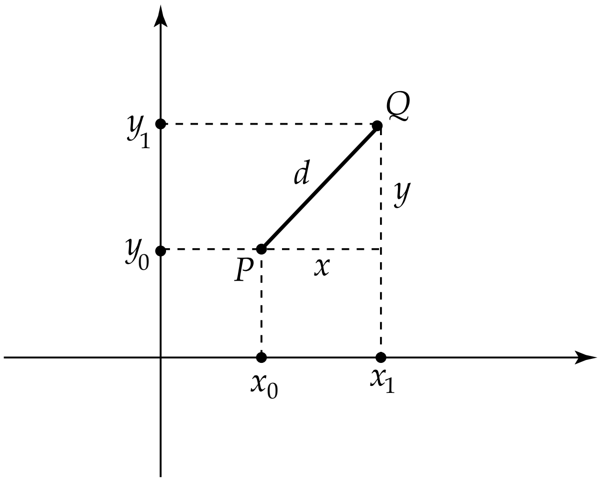
La siguiente propuesta nace de la iniciativa de compartir con los colegas, una prueba formal de un resultado que nos permite hallar la distancia de un punto a una recta. El resultado se diferencia de la relación típica abordada en los libros de álgebra lineal, y su demostración se basa unicamente en conceptos de matemática básica.

Contenido

1 Desarrollo de la Propuesta

Iniciamos este trabajo recordando la manera de hallar la distancia entre dos puntos $P(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$ en un sistema de coordenadas rectangulares. Consideremos los puntos P y Q :

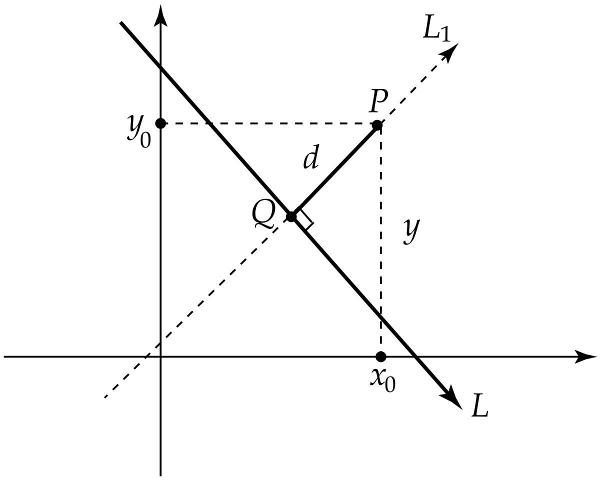
*Fecha de recepción del artículo: Julio, 2005 . Fecha de aceptación: Enero, 2006.
†Email: Evqm@costarricense.cr



Nos interesa encontrar la longitud d. Por el teorema de Pitágoras es facilmente observable en la figura 1 que:

$$x^2 + y^2 = d^2 \implies d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \tag{1}$$

El problema que nos interesa resolver, consiste en encontrar la distancia d de un punto dado del plano catesiano a una recta. Para ello consideremos un punto P del plano, P de coordenadas (x_0, y_0) y la recta L de ecuación asociada $y = mx + b$. Debemos encontrar la distancia de P a la recta L, por definición dicha distancia corresponde a la longitud del segmento perpendicular a L con extremo Q. Obsérvese la siguiente figura:



Si conociéramos las coordenadas de Q nuestro problema quedaría completamente resuelto, pues d correspondería a la distancia entre P y Q, que la podemos determinar mendiante la expresión (1) . Hallemos estas coordenadas.

Supongamos que Q es de coordenadas (x_1, y_1), de acuerdo a la figura 2 se puede concluir que $Q, P \in L_1$, hallemos la ecuación asociada a esta recta.

Pendiente de L_1

La ecuación de L corresponde a $y = mx + b$, como $L \perp L_1$ tenemos que:

$$m \cdot m_1 = -1 \implies m_1 = \frac{-1}{m}$$

Intersección con el eje de las ordenadas

Como $P \in L_1$ se tiene que:

$$b_1 = y_0 - m_1 x_0 = y_0 + \frac{x_0}{m}$$

finalmente la ecuación asociada a L_1 es:

$$y = -\frac{x}{m} + y_0 + \frac{x_0}{m} = \frac{-x + my_0 + x_0}{m}$$

Como Q es un punto tanto de L como de L_1, sus coordenadas satisfacen las ecuaciones asociadas a ambas rectas, de donde:

$$y_1 = mx_1 + b \qquad \wedge \qquad y_1 = \frac{-x_1 + my_0 + x_0}{m}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\frac{-x_1 + my_0 + x_0}{m} &= mx_1 + b \\
-x_1 + my_0 + x_0 &= m^2 x_1 + mb \\
x_1 &= \frac{m(y_0 - b) + x_0}{m^2 + 1}, \\
\text{así: } y_1 &= \frac{m^2 y_0 + mx_0 + b}{m^2 + 1}
\end{aligned}$$

Quedando de esta forma determinadas las coordenadas de Q. Luego, por (1) la distancia d viene dada por:

$$
\begin{aligned}
d &= \sqrt{\left(x_0 - \frac{m\left(y_0 - b\right) + x_0}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{m^2 y_0 + m x_0 + b}{m^2 + 1}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{m^2 x_0 - m y_0 + m b}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{y_0 - m x_0 - b}{m^2 + 1}\right)^2} \\
&= \sqrt{m^2 \left(\frac{y_0 - m x_0 - b}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{y_0 - m x_0 - b}{m^2 + 1}\right)^2} \\
&= \sqrt{m^2 \triangle^2 + \triangle^2} \\
&= \left|\triangle\right| \sqrt{m^2 + 1}
\end{aligned}
$$

donde $\triangle = \dfrac{y_0 - m x_0 - b}{m^2 + 1} = \dfrac{y_0 - y\left(x_0\right)}{m^2 + 1}$ y $y\left(x_0\right)$ representa la ecuación de la recta L evaluada en x_0.

En conclusión, la distancia d del punto P de coordenadas (x_0, y_0) a la recta L de ecuación asociada $y = mx + b$, corresponde a:

$$
d = \left|\triangle\right| \sqrt{m^2 + 1} \text{ con: } \triangle = \frac{y_0 - y\left(x_0\right)}{m^2 + 1}
$$

El resultado clásico que aparece en los libros de álgebra lineal para resolver este problema, establece que:

$$
d = \frac{\left|A x_0 + B y_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}
$$

con $Ax + By + C = 0$ la ecuación general de la recta.

Note que ambos resultados son equivalentes y no conducen a ningún tipo de contradicción, pues cualquiera de ellos se puede inferir del otro.

Lo importante de la demostración que hemos explicado, es que no requiere de ningún conocimiento de álgebra lineal para su desarrollo, por el contrario, unicamente se fundamenta en algunos conceptos de matemática básica.

2 Ejemplos de Aplicación

1. Determine la distancia del punto P de coordenadas $(-2, 1)$ a la recta L de ecuación asociada $5y + 3x = 1$.

Solución

$5y + 3x = 1 \implies y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$

Luego:

$$\triangle = \frac{1 - \left(-\dfrac{3}{5}(-2) + \dfrac{1}{5}\right)}{\dfrac{9}{25} + 1} = -\frac{5}{17}$$

Finalmente:

$$d = \left|-\frac{5}{17}\right| \sqrt{\frac{34}{25}} = \frac{\sqrt{34}}{17}$$

2. Halle la distancia entre las rectas paralelas:

$$L_1 : y = 2x - 1$$
$$L_2 : y = 2x + 4$$

Solución

Por definición, esta distancia d corresponde a la longitud del segmento perpendicular de un punto cualquiera de ellas a la otra recta. De esta forma, hallemos las coordenadas de un punto P de L_1 y posteriormente calculemos la distancia de P a L_2.

Para $x = 0$ en L_1 se obtiene $P = (0, -1)$, luego:

$$\triangle = \frac{1 - 4}{5} = -1$$

En consecuencia:

$$d = |-1|\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

3. Determine las coordenadas de un punto P cuya distancia a la recta L de ecuación asociada $y = \dfrac{x-7}{2}$ corresponde a 4, y represente geométricamente el conjunto de todos los puntos del plano que satisfacen esta condición.

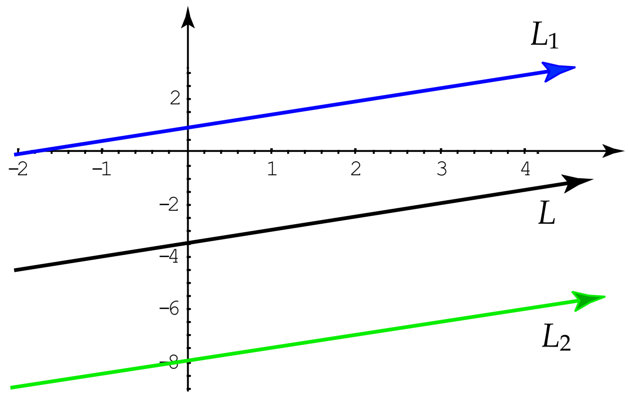
Solución

Sea $P = (x, y)$ entonces:

$$\begin{aligned}
|\triangle| \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1} &= 4 \\
\Longrightarrow \quad \frac{\left| y - \dfrac{x}{2} + \dfrac{7}{2} \right|}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}} &= 4 \\
\Longrightarrow \quad \frac{|2y - x + 7|}{2} &= 2\sqrt{5} \\
\Longrightarrow \quad |2y - x + 7| &= 4\sqrt{5}
\end{aligned}$$

de donde $-x + 2y = 4\sqrt{5} - 7 \ \vee \ -x + 2y = -4\sqrt{5} - 7$.

Ambas ecuaciones representan las ecuaciones asociadas a dos rectas paralelas que llamaremos L_1 y L_2 respectivamente, cualquier punto de las rectas es una solución. Si en la ecuación de L_1 $x = 0$ entonces $y = 2\sqrt{5} - \frac{7}{2}$ y el punto $P = \left(0, 2\sqrt{5} - \frac{7}{2}\right)$ satisface la condición deseada. Geométricamente las rectas paralelas L_1 y L_2, y la recta L, vienen dadas por la siguiente figura:



La recta de color azul corresponde a L_1, la de color negro a L y la de color verde a L_2.

3 Conclusiones

El problema resuelto en este pequeño trabajo, brinda un método de demostración, válido, elegante y sencillo, de fácil comprensión para un estudiante que curse su quinto año de enseñanza media, o bien, su primer año de vida universitaria. No recurre a ningún concepto de álgebra lineal y por ende se manifiesta como una alternativa para que los colegas encargados de este nivel de enseñanza, puedan desarrollar su propia inventiva, sea con el diseño de un laboratorio, un proyecto o sencillamente motivando a los estudiantes; a obtener por su cuenta este resultado.

4 Bibliografía

1. Barrantes, H. 1993. Elementos de Álgebra Lineal. Editorial EUNED.
2. Grossman, S. 1996. Álgebra Lineal. Editorial McGraw-Hill, México.
3. Riddle, D. 1997. Geometría Analítica. Editorial Thomson, México.
4. Swokowski, E. 1988. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. Editorial Iberoamericana, México.